Capitolo

7

I principi di conservazione

1. La quantità di moto

Cos'è che rende difficile cambiare lo stato di moto di un oggetto?

Fra due corpi aventi la stessa massa, l'esperienza mostra che è più arduo riuscire a fermare, o anche solo deviare, il più veloce, mentre fra due corpi con la stessa velocità è molto più difficile cambiare la direzione, oppure rallentare, quello che ha massa maggiore. Un portiere respinge facilmente un pallone che gli giunge contro a settanta chilometri l'ora, ma è assai più complicato per un'auto che avanzi a 70 km/h frenare fino a fermarsi. In generale, la resistenza al cambiamento nello stato di moto proviene da una combinazione della velocità e della massa. Per misurare questa proprietà, si introduce la grandezza fisica vettoriale detta *quantità di moto*, prodotto di massa e velocità:

Quantità di moto $\vec{p} = m\vec{v}$

Il vettore $\vec{p}$ ha la stessa direzione e verso della velocità, ed intensità pari al prodotto di quella della velocità per la massa dell'oggetto: le sue dimensioni fisiche sono quindi $\text{kg} \cdot \text{m/s}$. In tutti i casi in cui la massa del corpo non cambia (cioè ad esempio se non si tratta di un oggetto che perde dei pezzi per strada mentre si muove), la seconda legge della dinamica, *in caso di forza costante*, si riscrive:

$$\vec{F} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta m\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

oppure, in modo equivalente:

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$$

la variazione della quantità di moto prodotta da una forza costante è uguale alla forza per la durata dell'interazione

La Controfisica

Il celebre transatlantico Titanic aveva avvistato l'iceberg prima di entrarvi in collisione, ma non poté evitare il disastro perché era impossibile cambiare l'enorme valore della sua quantità di moto nel poco tempo che aveva a disposizione.

Quindi, quanto più intensa è la forza, o quanto più lunga la durata dell'interazione, tanto maggiore è il cambiamento che essa produce nella quantità di moto dell'oggetto a cui è applicata. Quando la forza varia durante l'interazione, la formula sopra non è esatta, tuttavia sarà tanto più accurata quanto più piccolo prenderemo l'intervallo Δt. In questi casi la seconda legge della dinamica, che assume forma $\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$, definisce il *valore medio della forza durante* Δt, cioè quel valore costante che applicato per l'intera durata dell'intervallo produce la stessa variazione della quantità di moto della forza vera.

Che cos'è l'impulso e come è definito?

Un modo efficace per descrivere la fisica di un'interazione è quello di introdurre un'altra nuova grandezza fisica, detta *impulso*, che nel caso di forza costante è definito come il prodotto della forza per la durata dell'interazione. Con tale grandezza possiamo riformulare la seconda legge della dinamica:

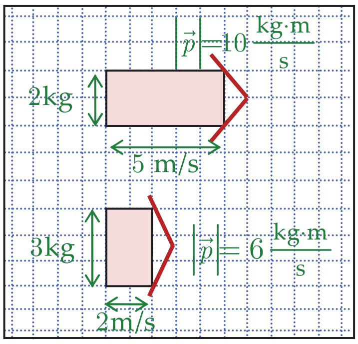
Impulso: $\vec{I} = \vec{F}\Delta t$

In base alla seconda legge della dinamica $\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$, il cambiamento della quantità di moto del punto dove la forza viene applicata è pari all'impulso su esso esercitato:

$$\Delta\vec{p} = \vec{I}$$

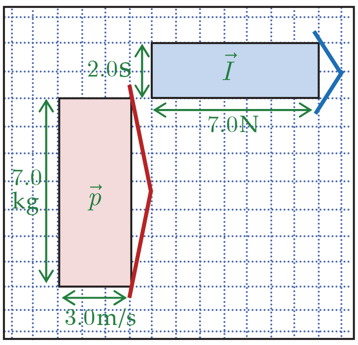
La seconda legge della dinamica implica che le dimensioni dell'impulso siano uguali a quelle della quantità di moto. Quindi, anche se misureremo l'impulso in $\mathrm{N \cdot s}$ va ricordato che questo corrisponde a $\mathrm{kg \cdot m/s}$. L'equazione $\Delta\vec{p} = \vec{I}$ non contiene informazioni diverse da quelle della seconda legge, ma vi sono casi in cui risulta di più facile utilizzo, permettendo di saltare il passaggio del calcolo dell'accelerazione. Inoltre, essendo l'impulso proporzionale alla forza, in base alla terza legge, durante un'interazione fra due corpi l'impulso impresso dal corpo A sul corpo B è uguale ed opposto a quello impresso da B su A.

Come possiamo raffigurare il contenuto della seconda legge in questa forma?



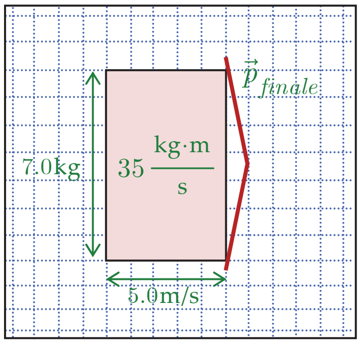
Nel caso in cui le velocità dei corpi coinvolti siano tutte su di una stessa retta è possibile una raffigurazione suggestiva del vettore $\vec{p}$, con entrambe le grandezze che contribuiscono alla sua intensità. Si tratta di una freccia orientata come $\vec{p}$ la cui lunghezza sia proporzionale alla velocità, ed il cui spessore proporzionale alla massa. In figura sono rappresentati due valori di quantità di moto, su di una griglia dove si è assegnato ad ogni quadretto una base corrispondente ad $1\ \mathrm{m/s}$ ed un'altezza di $1\ \mathrm{kg}$. In questo modo l'area del rettangolo colorato viene proporzionale all'intensità di $\vec{p}$. Sullo stesso schema può essere raffigurato anche l'impulso purché si adoperi una uguale scala, cioè si assegni $1\ \mathrm{N}$ alla larghezza di ogni blocchetto ed $1\ \mathrm{s}$ alla sua altezza, in modo che ogni quadretto corrisponda sempre a $1\ \mathrm{kg \cdot m/s} = 1\ \mathrm{N \cdot s}$.

Esercizi



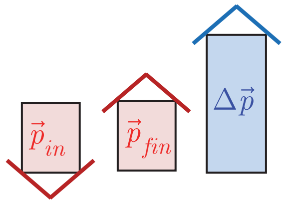
1. Un'automobile giocattolo, di massa $m = 7.0\ \mathrm{kg}$ che sta viaggiando a velocità di $3.0\ \mathrm{m/s}$ viene tirata da un filo per un tempo di $2.0\ \mathrm{s}$. Sapendo che la tensione del filo è $7.0\ \mathrm{N}$ si trovi la velocità finale del modellino.

Per rappresentare la quantità di moto costruiamo una quadrettatura di $1\ \mathrm{m/s} \times 1\ \mathrm{kg}$, a cui corrisponde $1\ \mathrm{N} \times 1\ \mathrm{s}$ per l'impulso. Rappresentiamo l'impulso esercitato dal filo con una freccia rettangolare di larghezza $7.0\ \mathrm{N}$ ed altezza $2.0\ \mathrm{s}$ (cioè $|\vec{I}| = 14\ \mathrm{N \cdot s}$) e la quantità di moto iniziale con una freccia larga $3.0\ \mathrm{m/s}$ ed alta $7.0\ \mathrm{kg}$, (cioè $|\vec{p}_{in}| = 21\ \mathrm{kg \cdot m/s}$) Dobbiamo costruire la freccia corrispondente alla quantità di moto finale: ovviamente non cambierà l'altezza della freccia iniziale visto che la massa è la stessa. Quindi aggiungeremo in lunghezza i quattordici quadretti dell'impulso impresso dal filo, cioè la velocità finale dovrà essere $5.0\ \mathrm{m/s}$, corrispondente a $|\vec{p}_{fin}| = 35\ \mathrm{kg \cdot m/s}$

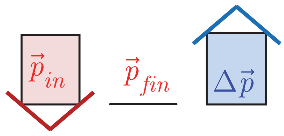


2. Un blocchetto gomma A viene fatto cadere sul piatto di una vecchia bilancia ad ago e vi rimbalza sopra. Successivamente viene fatto cadere da identica altezza anche un blocchetto di plastilina B di uguale massa, e questo rimane incollato al piatto. In quale caso lo spostamento dell'ago è stato maggiore?

Raffigurando il cambiamento di quantità di moto nei due casi, poiché la velocità d'impatto è la stessa, si vede subito che l'impulso impresso dal piatto della bilancia sulla palla A è maggiore (doppio se non c'è dissipazione di energia) di quello impresso sulla B. Pertanto è maggiore anche la forza, e per la terza legge della dinamica la palla A esercita una forza maggiore sul pavimento quindi è nel caso della massa A che l'ago della bilancia si è spostato di più.



blocco A



blocco B

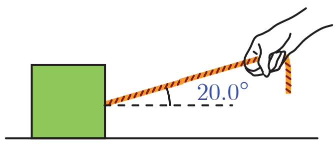
3. Calcolare la forza e l'impulso da applicare per arrestare in $10.0\ \mathrm{s}$ un'auto di massa $2.50 \times 10^3\ \mathrm{kg}$ in moto a $72.0\ \mathrm{km/h}$. Rappresentare la situazione usando il diagramma con le frecce dotate di spessore. [R: $5.00 \times 10^3\ \mathrm{N}, 5.00 \times 10^4\ \mathrm{N\,s}$]

4. Calcolare per quanti secondi deve essere acceso il motore di un razzo di massa $700\ \mathrm{kg}$ se si vuole portarlo dalla velocità di $450\ \mathrm{m/s}$ a quella di $500\ \mathrm{m/s}$ se la spinta costante esercitata è $1300\ \mathrm{N}$. [R: $26.9\ \mathrm{s}$]

5. Un Boeing 737-800 ha massa $m = 7.90 \times 10^4\,\mathrm{kg}$ e deve raggiungere la velocità di decollo di $250\ \mathrm{km/h}$ su di una pista lunga $L = 2200\ \mathrm{m}$. Calcolare l'impulso che devono esercitare i motori, supponendo costante la spinta, la forza esercitata e la durata del decollo. [R: $5.48 \times 10^6\,\mathrm{kg \cdot m/s}, 8.64 \times 10^4\,\mathrm{N}, 63.4\ \mathrm{s}$]

6. Un'auto di massa $m = 1300\ \mathrm{kg}$ che procede alla velocità di $18.5\ \mathrm{km/h}$ va a sbattere contro un muro ed il paraurti anteriore rientra di $20.0\ \mathrm{cm}$. Calcolare la forza mediamente esercitata dal muro e la durata dell'impatto. [R: $-1.66 \times 10^4\ \mathrm{N},\ 0.402\ \mathrm{s}$]

7. Su di un piano ruvido, un blocco inizialmente fermo, di massa $m = 30.0\ \mathrm{kg}$, viene trascinato per un tempo $\Delta t = 3.20\ \mathrm{s}$ da un filo inclinato di $20.0°$ verso l'alto, la cui tensione è $100\ \mathrm{N}$. Sapendo che il blocco raggiunge la velocità di $5.60\ \mathrm{m/s}$ si calcoli l'intensità dell'attrito dinamico col piano. [R: $41.4\ \mathrm{N}$]



8. Una palla di gomma $m = 60.0\ \mathrm{g}$ viene lasciata cadere da $1.50\ \mathrm{m}$ e rimbalza risalendo alla stessa altezza. Con un cronometro si misura una durata di $1.31\ \mathrm{s}$ per l'intero fenomeno. Calcolare il valore medio della forza esercitata dal pavimento. [R: $3.25\ \mathrm{N}$]

9. Calcolare la forza media esercitata sulla spalla da un fucile che spara una pallottola di $2.50\ \mathrm{g}$ a $330\ \mathrm{m/s}$, sapendo che la canna è lunga $70.0\ \mathrm{cm}$ e assumendo che l'accelerazione del proiettile nella canna sia costante. [R: $151\ \mathrm{N}$]

In quali casi la quantità di moto rimane costante?

La terza legge della dinamica ci assicura che la somma di tutte le forze *interne* ad un corpo, o ad un sistema di corpi, *è sempre nulla*. La ragione di ciò è che, qualunque sia la forza che agisce su di una parte A del sistema ad opera di un'altra parte B, nel conto totale delle forze interne dovremo mettere anche quella, uguale e contraria, che agisce su B esercitata da A. Pertanto si tratta sempre di addizionare tutte coppie aventi ciascuna somma nulla. Nel caso speciale in cui non agiscono nemmeno forze dall'esterno, anche la risultante complessiva delle forze, esterne ed interne, è nulla. In questa situazione, la seconda legge della dinamica assume una forma semplice per cui la quantità di moto del nostro corpo, o sistema di corpi, *non cambia*, o come si dice, *si conserva*. L'esperienza mostra che, *nei riferimenti inerziali*, questo risultato ha la validità di un principio universale, cioè che si estende ad ambiti della fisica diversi dalla meccanica classica che qui stiamo studiando, come la meccanica relativistica e la meccanica quantistica. Possiamo quindi enunciare il:

La Controfisica

Il risultato $\Delta\vec{p}=\vec{0}$ è stato qui *dimostrato* partendo dalle leggi della dinamica. Ma quando si passa a scale molto piccole, o a velocità molto grandi, subentrano ambiti della fisica detti rispettivamente *meccanica quantistica* e *meccanica relativistica*, in cui le definizioni delle grandezze fisiche sono diverse da quelle che abbiamo dato fin qui in meccanica classica. Poiché la conservazione della quantità di moto continua a valere anche in questi ambiti (dove non può più essere *dimostrata*), diciamo che essa esprime *un principio*, cioè descrive la natura ad un livello più fondamentale delle leggi della dinamica. Inoltre, nel caso di azioni che non avvengono a contatto, ma a distanza, come la gravità, la terza legge della dinamica viene violata durante il tempo necessario alla propagazione dell'azione dal corpo A al corpo B. Viceversa, anche in queste situazioni è possibile rispettare la conservazione della quantità di moto, e questo si fa associando un valore di $\vec{p}$ alla stessa interazione, cosa resa possibile dall'introduzione del concetto di *campo* che vedremo.

Principio di conservazione della quantità di moto

in un sistema di corpi in cui sia nulla la risultante delle forze che agiscono dall'esterno, rimane costante la quantità di moto:

$$\Delta\vec{p}=\vec{0}$$

Esercizi

10. Un pattinatore di massa complessiva $M=80.0\ \text{kg}$, fermo su di un lago ghiacciato, lancia lo zaino di $m=5.00\ \text{kg}$ a $3.00\ \text{m/s}$. Calcolare la velocità acquistata dal pattinatore specificandone direzione e verso. [R: $0.188\ \text{m/s}$]

11. Una pistola ha massa $M=950\ \text{g}$ e spara proiettili di $m=8.00\ \text{g}$, i quali escono dalla sua canna alla velocità di $365\ \text{m/s}$.[1] Calcolare la velocità di rinculo, il cambiamento di quantità di moto della pistola e del proiettile, e l'energia dello sparo che è stata convertita in energia cinetica. [R: $-3.07\ \text{m/s}, \pm 2.92\ \text{kg}\cdot\text{m/s}, 537\ \text{J}$]

12. Un fucile di massa $M=4.00\ \text{kg}$ spara un proiettile di $m=50.0\ \text{g}$ imprimendogli una velocità di $360\ \text{m/s}$. Determinare la velocità con cui rincula il fucile e l'impulso che la spalla deve applicare se vuole smorzarlo in un tempo di $1.50\ \text{s}$. [R: $4.50\ \text{m/s}; 13.6\ \text{N}$]

Cosa succede quando la massa cambia durante il moto, come per un razzo?

Il principio di funzionamento del moto di un veicolo è sempre lo stesso: si spinge una massa in una direzione e di conseguenza si è spinti nel verso opposto. Aerei, elicotteri e dirigibili spingono l'aria in basso, le navi l'acqua, automobili ed uomini spingono indietro il pianeta Terra. Un razzo nello spazio vuoto brucia il suo carburante espellendolo per trarne una spinta propulsiva $\vec{F}_p$: è il principio del motore "a reazione", basato sulla terza legge. Se la massa del carburante è una frazione consistente di quella del razzo, dobbiamo mettere nel conto anche questa variazione, il che rende complessa l'applicazione diretta della seconda legge. Si può però ricavare la velocità finale con l'equazione dell'impulso:

La Controfisica

Il motore a reazione è uno strumento che nella sua essenza assomiglia al volersi sollevare sparando con un fucile verso il basso e sfruttando il rinculo verso l'alto.

$$\vec{F}_p\Delta t = m_{finale}\vec{v}_{finale} - m_{iniziale}\vec{v}_{iniziale}$$

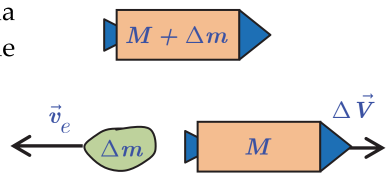
Al fisico russo Kostantin Tsiolkovskiy (1857-1935), considerato il padre del volo spaziale, si deve la cosiddetta *equazione del razzo* che esprime come un corpo possa in-

[1] Si confronti questo valore con la velocità del suono nell'aria (343 m/s) o con quella dei passeggeri a bordo di un aeroplano (270 m/s).

crementare la sua velocità espellendo parte della sua massa in verso opposto. Immaginiamo un razzo fermo nello spazio, lontano da altri corpi, ed indichiamo con:

- v_e la componente, supposta costante, della velocità di espulsione del carburante rispetto al razzo;
- Δm la massa espulsa nell'intervallo di tempo Δt;
- M la massa residua del razzo dopo l'espulsione;
- ΔV l'incremento della componente di velocità del razzo nella direzione di avanzamento guadagnato grazie all'espulsione (il segno è opposto a v_e)

Poiché non ci sono forze che agiscono dall'esterno, la quantità di moto del sistema formato dal razzo e dal carburante, nel complesso, rimane uguale al valore iniziale (cioè nulla se il razzo era fermo), quindi:



$$M\Delta V + v_e \Delta m = 0$$

Dividendo per Δt si fanno comparire nell'equazione l'accelerazione media del razzo $a = \Delta V/\Delta t$, e la quantità di kilogrammi di carburante espulsa ogni secondo, cioè il *flusso di massa* $\Delta m/\Delta t$:

$$M\frac{\Delta V}{\Delta t} = -v_e \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

Questa equazione permette di ricavare la componente della forza propulsiva in direzione del moto, $F_p = Ma = M\Delta V/\Delta t$, esercitata sul razzo:

$$F_p = -v_e \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

dove il segno meno indica che la forza ha uguale direzione ma verso opposto rispetto alla velocità del carburante.

La Controfisica
Ogni volta che un corpo espelle un flusso di massa $\Delta m/\Delta t$ alla velocità v oppure viene investito da esso senza rimbalzo, in modo simile al getto di un idrante, *subisce una forza* $v\Delta m/\Delta t$

Che tipo di moto è quello del razzo a reazione?

Come si vede dalla formula, l'intensità della spinta propulsiva è costante se sono costanti i due fattori che la compongono, cioè v_e e $\Delta m/\Delta t$. Tuttavia nel moto del razzo non è costante l'accelerazione $a = F_p/M$, che invece aumenta col tempo, dato che al denominatore la massa M del razzo diminuisce progressivamente. E' un effetto ben visibile osservando un missile sulla rampa di lancio, che all'inizio sembra andare pianissimo e poi aumenta di velocità in maniera visibilmente molto più rapida di come accade in un moto uniformemente accelerato (ad esempio quello di caduta).

13. Il razzo Saturn V, che lanciò l'Apollo 11, aveva una massa $M = 3.00\times10^6$ kg ed espelleva carburante in ragione di $\Delta m/\Delta t = 1.50\times10^4$ kg/s, alla velocità di 2.60×10^3 m/s. Calcolare la sua accelerazione nella fase di decollo.

Assumendo che le variazioni nella massa del razzo siano trascurabili nella fase del decollo, supponiamo M costante ed applichiamo la seconda legge della dinamica lungo un asse verticale orientato in alto:

$$F_{py} + W_y = Ma_y \;\Rightarrow\; v_e\frac{\Delta m}{\Delta t} - Mg = Ma_y$$

$$a_y = \frac{v_e\Delta m/\Delta t - Mg}{M} = \frac{2.60\times10^3\times1.50\times10^4 - 3.00\times10^6\times9.81}{3.00\times10^6}\ \text{m/s}^2 = 3.19\ \text{m/s}^2$$

14. Calcolare che velocità raggiunge un razzo di massa complessiva $700\ \mathrm{kg}$ (dei quali $100\ \mathrm{kg}$ sono di carburante), che viaggia a $250\ \mathrm{km/h}$ sapendo che la combustione di tutto il carburante produce una spinta propulsiva di $1300\ \mathrm{N}$ che dura $60.0\ \mathrm{s}$.
[R: $212\ \mathrm{m/s}$]

15. Un cannoncino posto sopra ad un carrello spara ininterrottamente delle palline di massa $m = 0.250\ \mathrm{kg}$ alla velocità di $1.20\ \mathrm{m/s}$, in ragione di tre di esse ogni secondo. Sapendo che la massa complessiva iniziale del sistema formato dal carrello, dal cannoncino e dalle palline è $M = 100\ \mathrm{kg}$, calcolare la sua accelerazione dopo $20.0\ \mathrm{s}$ su di un piano senza attrito. [R: $0.0106\ \mathrm{m/s^2}$]

16. Sulla superficie di Marte l'accelerazione di gravità vale $g_M = 3.72\ \mathrm{m/s^2}$. Un razzo di massa $M = 500\ \mathrm{kg}$ (carburante incluso) che volesse guadagnare un'accelerazione in alto di $2.50\ \mathrm{m/s^2}$ in $15.0\ \mathrm{s}$ quanto carburante deve espellere ogni secondo, sapendo che la velocità di espulsione è $300\ \mathrm{m/s}$? Calcolare la massa del razzo in quel momento. [R: $7.91\ \mathrm{kg/s}, 381\ \mathrm{kg}$]

17. Un motore a reazione espelle con regolarità $25.0\ \mathrm{kg}$ di propellente in un tempo di $1.25\ \mathrm{s}$ ad una velocità di $20.0\ \mathrm{m/s}$. Calcolare la spinta di cui è capace il motore, il cambiamento della quantità di moto che il motore produce in un minuto su di un razzo di massa complessiva M. [R: $400\ \mathrm{N}, 2.40 \times 10^4\ \mathrm{kg \cdot m/s}$]

18. Da un rubinetto esce un flusso costante $\Delta m / \Delta t = 0.150\ \mathrm{kg/s}$ di acqua, che va a cadere sul piatto di una bilancia posta $75.0\ \mathrm{cm}$ sotto l'imboccatura e poi scivola via. Che valore segna l'ago della bilancia? [R: $63.3\ \mathrm{g}$]

19. Una clessidra alta $30.0\ \mathrm{cm}$ ha massa $m = 500.00\ \mathrm{g}$, la metà della quale è sabbia. Viene posta sulla bilancia mentre la sabbia scende, e l'ago segna un valore $M = 502.00\ \mathrm{g}$. Si dia una stima del tempo che la clessidra impiega a svuotarsi completamente. [R: $\sim 18\ \mathrm{s}$]

Che cosa succede se la quantità di moto cambia direzione?

Più in generale, i corpi possono cambiare il loro vettore $\vec{p}$ tanto in intensità quanto in direzione, ed in questa situazione la semplice rappresentazione di prima con la "freccia spessa" non è possibile. E' il caso di un'auto che percorre una strada curva, ricevendo continuamente impulso dal terreno per mezzo dell'attrito, in modo da cambiare la direzione della sua quantità di moto. Tuttavia, il problema non è matematicamente diverso da prima, poiché l'equazione $\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p}$, così come l'equazione $\Delta\vec{p} = \vec{0}$ sono vettoriali. Questo significa che si possono applicare proiettandole lungo qualunque direzione:

$$F_x \Delta t = \Delta p_x,\ F_y \Delta t = \Delta p_y,\ \ldots$$

Quindi se ad esempio è nulla la risultante delle forze esterne in una certa direzione, anche la componente della quantità di moto in quella direzione rimarrà costante.

Esercizi

20. Una vettura di massa $m = 1100\ \mathrm{kg}$ sta viaggiando con una velocità che in un riferimento su un piano orizzontale può scriversi $\vec{v} = (20.0\ \mathrm{m/s};\ 16.0\ \mathrm{m/s})$. L'autista esegue una curva frenando e la velocità dell'auto diviene $\vec{v} = (12.0\ \mathrm{m/s};\ 10.0\ \mathrm{m/s})$.

Quant'è stata la variazione della quantità di moto? E l'impulso applicato dal terreno sull'auto, tramite l'attrito statico con le gomme?

Scriviamo il vettore quantità di moto rispettivamente prima e dopo la curva:

$\vec{p}_1 = (1100\times 20.0\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}};1100\times 16.0\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}}) = (2.20\times 10^4\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}},1.76\times 10^4\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}})$

$\vec{p}_2 = (1100\times 12.0\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}};1100\times 10.0\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}}) = (1.32\times 10^4\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}},1.10\times 10^4\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}})$

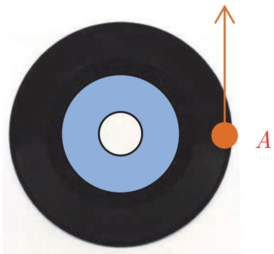
calcoliamo la differenza:

$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \left((1.32-2.20)\times 10^4\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}},(1.10-1.76)\times 10^4\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}}\right)$

$\Delta\vec{p} = \left(-0.88\times 10^4\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}},-0.65\times 10^4\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}}\right)$

e dalla seconda legge della dinamica $\Delta\vec{p} = \vec{F}_s\Delta t$ questo vettore $\Delta\vec{p}$ è anche uguale all'impulso impresso dal terreno $\vec{F}_s\Delta t$ tramite la forza di attrito statico fra pneumatici ed asfalto $\vec{F}_s$ supposta costante.

21. Un pallone che avanza con velocità $\vec{v} = (10.0\text{ m/s};0\text{ m/s})$ viene intercettato da un giocatore che lo calcia con una forza costante $\vec{F} = (0\text{ N};1200\text{ N})$. Sapendo che la massa del pallone è $m = 450\text{ g}$ e che l'interazione dura 2.50 ms, si trovi la quantità di moto del pallone dopo il calcio. [R: $(4.50\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}};3.00\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}})$]



22. Un blocco di plastilina di $m = 25.0$ g gira su di un disco di vinile a velocità di modulo costantemente uguale a 40.0 cm/s. Si calcoli l'intensità del vettore $\Delta\vec{p}$ relativa al cambiamento di quantità di moto in un quarto di giro, in mezzo giro ed in un giro completo. [R: $0.0141\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}};0.200\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}};0\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}}$]

23. Una pallina da tennis di massa $m = 58.0\text{ g}$ viene colpita da una racchetta e la sua velocità passa da 25.0 m/s a 35.0 m/s, mentre la direzione viene deviata di $42.0°$. Sapendo che l'impatto è durato 2.00 ms si calcoli l'intensità della forza esercitata dalla racchetta, supponendola costante. [R: 35.0 N]

24. Una ragazza di $m_R = 40.0$ kg ha sulle spalle uno zaino di $m_Z = 4.00$ kg e procede in linea retta su di uno skateboard alla velocità di 4.00 m/s. Ad un certo istante e lancia lo zaino in direzione perpendicolare a quella di avanzamento con velocità 2.20 m/s rispetto al terreno. Calcolare la nuova velocità della ragazza e l'energia cinetica prodotta nel lancio. [R: $\vec{v}_R(-0.220\text{ m/s};4.00\text{ m/s});\vec{v}_z(2.20\text{ m/s};4.00\text{ m/s});7.42\text{ J}$]

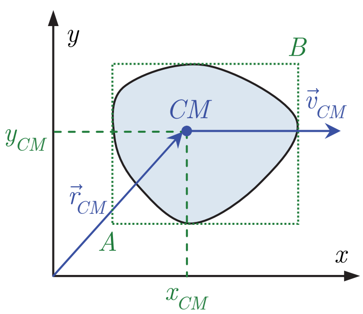
25. Un sacchetto di sabbia di massa $m_S = 5.00$ kg è fermo su di un lago ghiacciato dove può scivolare senza attrito. Viene trapassato in linea retta da un proiettile di $m_P = 10.0\text{ g}$ inclinato di $25.0°$ rispetto all'orizzontale, che ne esce a velocità dimezzata. Sapendo che il sacchetto si mette in moto con velocità di 0.300 m/s, si calcoli la velocità originale del proiettile e l'impulso esercitato dal piano. [R: $331\text{ m/s};0.700\text{ Ns}$]

26. Un uomo su di una barca (massa complessiva $M = 500\text{ kg}$) sta procedendo verso nord a 2.50 m/s. L'uomo lancia una zavorra di massa $m = 12.0$ kg alla sua destra, ad un angolo di $30.0°$ con il verso di avanzamento. Dopo il lancio la barca ha acquistato una velocità di 0.150 m/s verso ovest. Calcolare la velocità con cui è stata lanciata la zavorra rispetto alla terraferma e la nuova velocità della barca verso nord. [R: $12.2\text{ m/s};2.30\text{ m/s}$]

2. Il moto del centro di massa

Abbiamo già incontrato il centro di massa nel capitolo sulla rotazione dei corpi estesi; vediamone ora le proprietà dinamiche, richiamandone prima la definizione. E' possibile pensare un corpo di massa M come composto di tante particelle $m_1, m_2, ... m_i$, ed addizionare a membro a membro (con la regola di punta-coda) tutte le equazioni $\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i$ che esprimono la seconda legge della dinamica per ciascuna di esse. Al membro di sinistra otterremo la forza risultante $\vec{F} = \Sigma \vec{F}_i$ che agisce sul sistema dall'esterno, mentre a destra, moltiplicando e dividendo per la massa totale M, si ha:

$$\vec{F} = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + ... = M\left(\frac{m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + ...}{M}\right)$$



La Controfisica

Il centro di massa è situato in un rettangolo il cui estremo in basso a sinistra A è la minima ascissa e la minima ordinata dei punti del sistema mentre nel punto in alto a destra, B, ci sono i corrispondenti valori massimi.

Come si definisce il centro di massa di un corpo?

Ad ogni sistema di particelle si associa un punto, detto *centro di massa* (CM), la cui accelerazione $\vec{a}_{CM}$ è data dall'espressione $\frac{1}{M}(m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + ...)$ che, nel membro di destra dell'equazione sopra, compare moltiplicata per la massa totale M. In conseguenza di questa definizione, la posizione e la velocità del CM si ottengono a partire dai vettori $\vec{r}_i$ e $\vec{v}_i$ che individuano la posizione e la velocità di ciascuna particella tramite le formule:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + ...}{M} \qquad \vec{v}_{CM} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + ...}{M}$$

Il centro di massa (CM), è una sorta di punto intermedio, che si ottiene *pesando* la posizione di ciascuna particella con la sua massa. Sarà quindi più vicino alle particelle di massa maggiore. Può essere calcolato sia per un insieme di particelle legate fra loro a formare un oggetto, sia quando le particelle sono del tutto indipendenti.

Come si riscrive la quantità di moto totale di un sistema facendo uso del CM?

In base alla definizione data sopra, risulta che la quantità di moto totale di un sistema si può scrivere come quella di un punto avente massa pari a quella complessiva M e velocità uguale a quella del CM del sistema:

$$\vec{p} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + ... = M\left(\frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + ...}{M}\right) = M \vec{v}_{CM}$$

Osserviamo che, se si sceglie di studiare il moto di un corpo (o di un sistema di corpi) in un riferimento agganciato al suo CM, poiché si ha ovviamente che in questo riferimento $\vec{v}_{CM}$ è nulla, in esso la quantità di moto del corpo (o del sistema) risulta nulla.

> La quantità di moto di un corpo (o di un sistema di corpi), in un riferimento che si muove alla velocità del CM, è nulla.

Il centro di massa coincide con il baricentro?

Poiché avremo a che fare con situazioni in prossimità della superficie terrestre, la forza di gravità potrà considerarsi sempre costante all'interno del volume occupato dall'oggetto. Questo porta l'espressione matematica che definisce il CM a coincidere con l'espressione che definisce il baricentro e quindi possiamo estendere al CM tutte le proprietà del baricentro, ad esempio il fatto che se l'oggetto presenta assi di simmetria il CM si dispone lungo di essi, che le distanze di due particelle dal comune CM sono inversamente proporzionali alle loro masse ($d_A/d_B = m_B/m_A$) e soprattutto la *proprietà distributiva*, cioè il fatto che il CM di un sistema di oggetti può essere calcolato come se fosse un sistema di punti con la massa di ciascuno concentrata nel rispettivo CM.

27. Calcolare la velocità del CM e la quantità di moto di un sistema di due automobili, la prima di massa $m_1 = 1.500 \times 10^3$ kg che avanza verso est a velocità $|\vec{v}_1| = 28.0\ \text{m/s}$, la seconda di massa $m_2 = 1.900 \times 10^3$ kg che avanza verso nord-ovest: a velocità $|\vec{v}_2| = 20.0\ \text{m/s}$.

In un riferimento con le ascisse da ovest ad est e le ordinate da sud a nord abbiamo:

$$v_{CMx} = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\ |\vec{v}_1| - m_2\ |\vec{v}_2|\ \cos 45°}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{1.50 \times \cancel{10^3} \times 28.0 - 1.90 \times \cancel{10^3} \times 20.0 \times 0.707}{1.50 \times \cancel{10^3} + 1.90 \times \cancel{10^3}}\ \text{m/s} = 4.45\ \text{m/s}$$

$$v_{CMy} = \frac{\cancel{m_1 v_{1y}} + m_2 v_{2y}}{m_1 + m_2} = \frac{m_2\ |\vec{v}_2|\ \sin 45°}{m_1 + m_2} =$$

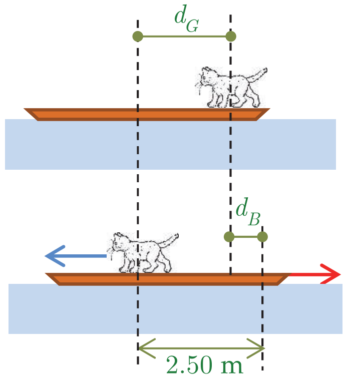
$$= \frac{1.90 \times \cancel{10^3} \times 20.0 \times 0.707}{1.50 \times \cancel{10^3} + 1.90 \times \cancel{10^3}}\ \text{m/s} = 7.90\ \text{m/s}$$

$$\vec{v}_{CM} = \sqrt{v_{CMx}^2 + v_{CMy}^2} = \sqrt{4.45^2 + 7.90^2}\ \text{m/s} = 9.07\ \text{m/s}$$

La quantità di moto equivale a quella di un punto concentrato nel CM, di massa complessiva pari a quella delle due auto:

$$|\vec{p}| = (m_1 + m_2)\ |\vec{v}_{CM}| = [(1.50 + 1.90) \times 10^3 \times 9.07]\text{kg} \cdot \text{m/s} = 30.8 \times 10^3\,\text{kg} \cdot \text{m/s}$$

28. Su di una barchetta di massa $m_B = 30.0$ kg ferma lontano dalla riva, si trova un gatto di $m_G = 3.00$ kg. L'animale cammina verso la riva percorrendo sulla barca uno spazio di 2.50 m. Calcolare di quanto si è avvicinato realmente alla riva e la velocità del CM del sistema al termine della passeggiata.



Indichiamo con d_G la distanza percorsa dal CM del gatto (o da un qualsiasi suo punto), rispetto alla terra, ed analogamente con d_B quella percorsa dal CM della barca, (o dalla sua poppa o da un qualsiasi suo punto). Lo spazio di 2.50 m sulla barca è la somma dello spazio d_G di cui CM del gatto si è avvicinato a riva e dello spazio d_B di cui CM della barca se ne è allontanato:

$$d_G + d_B = 2.50\ \text{m}$$

Non sappiamo in che punto si trovi inizialmente il gatto, ma se partisse proprio sopra al CM della barca allora, *poiché la posizione del CM del sistema non cambia mai durante la passeggiata*, i valori d_G e d_B sarebbero proprio le nuove distanze dei CM dei due corpi dal CM del sistema. Ma come sappiamo dalla proprietà distributiva del baricentro, tali distanze devono essere inversamente proporzionali alle masse: nel caso specifico il rapporto delle masse è $1/10$, quindi se ad esempio il gatto avanza di 10 cm la barca indietreggia di 1 cm. E poiché gli spazi percorsi d_G e d_B non dipendono dal punto della barca da cui parte il gatto, questa proporzionalità inversa deve valere in generale:

$$\frac{d_G}{d_B} = \frac{m_B}{m_G} \quad \Rightarrow \quad d_B = d_G\,\frac{m_G}{m_B}$$

sostituendo:

$$d_G + d_G \frac{m_G}{m_B} = 2.50 \text{ m} \;\Rightarrow\; d_G = \frac{2.50 \text{ m}}{1 + m_G / m_B} = \left(\frac{2.50}{1 + 3.00/30.0} \right) \text{m} = 2.27 \text{ m}$$

La velocità del CM del sistema barca più gatto è nulla alla fine della passeggiata come lo era all'inizio, dato che orizzontalmente hanno agito solo forze interne.

29. Tre uccelli di massa $m_1 = 3.50$ kg, $m_2 = 5.00$ kg, $m_3 = 6.00$ kg volano ad una stessa quota. Le velocità dei primi due sul piano orizzontale sono rispettivamente: $\vec{v}_1(2.50 \text{ m/s}; 4.00 \text{ m/s})$, $\vec{v}_2(-4.50 \text{ m/s}; 3.00 \text{ m/s})$. Si trovi a che velocità deve volare il terzo affinché il CM del sistema sia fermo. [R: $\vec{v}_3(2.29 \text{ m/s}; -4.83 \text{ m/s})$]

Quali informazioni ci può fornire il centro di massa?

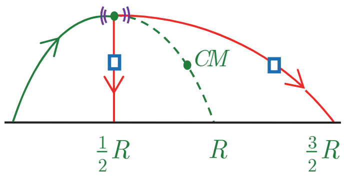
Il CM è un punto che si muove come se in esso fosse concentrata l'intera massa del sistema e lì applicate tutte le forze che agiscono dall'esterno.

> La risultante $\vec{F}$ delle forze che dall'esterno sono applicate sul sistema determina lo stato di moto del centro di massa.

In quali casi la velocità del CM rimane costante?

Sappiamo che $\Delta\vec{p} = \vec{0}$ (cioè la quantità di moto si conserva) per un sistema di corpi in cui sia nulla la risultante delle forze che agiscono dall'esterno. Ma essendo $\vec{p} = M\vec{v}_{CM}$ questo implica che rimanga costante anche la velocità del centro di massa. Osserviamo inoltre che l'equazione $\Delta\vec{p} = \vec{0}$ è vettoriale, cioè si può applicare a qualunque direzione lungo cui non agiscano forze dall'esterno. Pertanto anche la componente della velocità del CM in quella direzione rimarrà costante. Vediamone un esempio.

Cosa succede al CM di una bomba che esplode a mezz'aria?



Consideriamo un proiettile che esplode in due pezzi uguali proprio mentre si trova nel punto più alto della sua traiettoria parabolica. Prendiamo il caso semplice in cui l'esplosione imprima ai due frammenti velocità *orizzontali* opposte, la cui intensità sia uguale a quella posseduta dal proiettile nel massimo, così che dopo la conflagrazione il frammento dietro abbia velocità nulla e quello davanti velocità doppia. Le due parti devono soddisfare la condizione $\Delta p_x = 0$, mentre nel frattempo lungo la direzione y la quantità di moto sta cambiando ad opera della forza di gravità, esterna al proiettile. La quantità di moto in orizzontale inizialmente era mv_x, mentre dopo è data dalla somma $0 + \frac{1}{2}m(2v_x)$ e quindi non è cambiata. Il frammento che sta dietro rimasto privo della velocità orizzontale, cade verticalmente, cioè la sua gittata è $R / 2$ (dove $R = v_x\sqrt{2y_0 / g}$ è la gittata che avrebbe avuto se non fosse esploso). Il frammento che sta davanti descrive un arco di parabola partendo con velocità orizzontale $2v_x$ quindi percorre una distanza orizzontale doppia di quella che avrebbe percorso la bomba originaria, cioè la gittata del frammento è: $\frac{1}{2}R + 2(\frac{1}{2}R) = \frac{3}{2}R$.

Poiché si è supposto che l'esplosione imprima un impulso tutto orizzontale, il moto di caduta in verticale non viene influenzato e così le altezze dei due frammenti sono identiche in ogni istante ed uguali all'altezza che avrebbe avuto il CM della bomba se non fosse esplosa. In altri termini l'esplosione, frutto di sole forze interne, non altera la cinematica del CM, che prosegue lungo la parabola iniziale.

Esercizi

30. Da un'altezza di 25.0 m viene lasciato cadere un sacco di sabbia di massa $M = 15.0$ kg. Quando si trova a metà della sua caduta viene colpito da un proiettile di massa $m = 0.400$ kg che viaggia a 200 m/s lungo una direzione inclinata di $50.0°$

rispetto all'orizzontale. Sapendo che il proiettile resta conficcato, calcolare la distanza dalla verticale alla quale tocca terra il sacchetto.

La velocità con cui sta cadendo il sacchetto a metà dell'altezza iniziale è quella di un oggetto lasciato andare da una quota $h = (25.0 - \frac{1}{2}\times 25.0)\text{ m} = 12.5\text{ m}$:

$v_{Sx} = 0\text{ m/s} \qquad v_{Sy} = -\sqrt{2gh} = \sqrt{2\times 9.81\times 12.5}\text{ m/s} = -15.7\text{ m/s}$

mentre il proiettile ha velocità:

$v_{Px} = (200\cos 50.0°)\text{ m/s} = 129\text{ m/s} \qquad v_{Py} = (200\sin 50.0°)\text{ m/s} = 153\text{ m/s}$

Durante l'impatto del proiettile non varia la quantità di moto del CM dato che le forze sono interne al sistema (i cambiamenti dovuti alla gravità si possono trascurare data la brevità della durata dell'impatto):

$p_{CMx} = m_P v_{Px} + \cancel{m_S v_{Sx}} = (0.400\times 129)\text{ kg m/s} = 51.6\text{ kg m/s}$

$p_{CMy} = m_P v_{Py} + m_S v_{Sy} = [0.400\times 153 + 15.0\times(-15.7)]\text{ kg m/s} = -174\text{ kg m/s}$

Da questo punto in poi il problema diviene quello di una particella concentrata nel CM del sistema, avente massa complessiva $M + m = 15.4\text{ kg}$ che viene lanciata da un'altezza $y_0 = 12.5\text{ m}$ alla velocità del CM:

$v_{CMx} = \dfrac{p_{CMx}}{M+m} = \dfrac{51.6}{15.4}\text{ m/s} = 3.35\text{ m/s} \quad v_{CMy} = \dfrac{p_{CMy}}{M+m} = \dfrac{-174}{15.4}\text{ m/s} = -11.3\text{ m/s}$

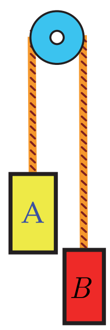
Pertanto il tempo di caduta si ha imponendo nulla la quota:

$y(t) = y_0 + v_{CMy}t - \frac{1}{2}gt^2 = 12.5 - 11.3t - 4.91t^2 = 0 \;\Rightarrow\; t = 0.817\text{ s}$

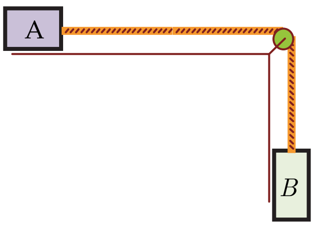
e la gittata si trova inserendo il tempo di caduta nella legge oraria delle ascisse:

$x(t) = x_0 + v_{CMx}t = 3.35t \;\Rightarrow\; x(0.817\text{ s}) = (3.35\times 0.820)\text{ m} = 2.74\text{ m}$

31. Da un'altezza di 30.0 m viene lasciato cadere un sacco di sabbia di massa $M = 20.0\text{ kg}$. Quando si trova a metà della sua caduta viene colpito da un proiettile di massa $m = 0.400\text{ kg}$ che viaggia a 200 m/s lungo una direzione inclinata di $60.0°$ rispetto all'orizzontale. Sapendo che il proiettile trapassa il sacchetto e ne esce senza deviare, con velocità 120 m/s, calcolare la distanza dalla verticale alla quale tocca terra il sacchetto. [R: 0.617m]



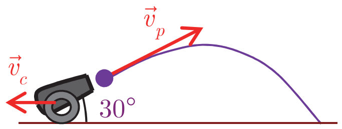
32. Calcolare la velocità del CM della *macchina di Atwood* in figura, avente $m_A = 3.50\text{ kg}$ ed $m_B = 5.50\text{ kg}$, in un istante di 1.20 s successivo a quello in cui le masse sono lasciate libere di scorrere. [R: 0.654m/s verso il basso]



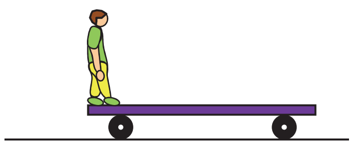
33. Calcolare la velocità del CM e la quantità di moto del sistema di due masse in figura avente $m_A = 2.00\text{ kg}$ ed $m_B = 3.40\text{ kg}$ quando sono trascorsi 2.10 s dal momento in cui sono lasciate libere di andare.
[R: $\vec{v}_{CM}(4.81\text{ m/s}; -8.18\text{ m/s}); \vec{p}_{CM}(26.0\text{ kg}\cdot\text{m/s}; 44.2\text{ kg}\cdot\text{m/s})$]

34. Una cometa di massa $m = 300\text{ kg}$ che viaggia in linea retta nello spazio interplanetario alla velocità di 350 m/s esplode in due frammenti di cui quello che viaggia in avanti è di 200 kg e si sposta a 650 m/s. Si dica quanto vale la velocità del pezzo che procede in verso opposto. Quale sarebbe il valore se i due frammenti venissero scagliati perpendicolarmente alla traiettoria iniziale? Quanto vale la velocità del CM nei due casi? [R: $-250\text{ m/s}; -1300\text{ m/s}; 350\text{ m/s}$]

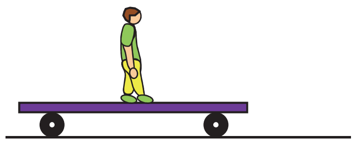
35. Un'astronave di massa $M = 400\text{ kg}$ viaggia negli spazi interplanetari alla velocità di 300 m/s verso la destra di un osservatore che si trova fermo in una stazione spaziale. Nell'istante in cui passa davanti alla stazione l'astronave esplode in due frammenti, di massa l'uno tripla dell'altro. L'osservatore valuta che il maggiore, A; viaggia verso la sua sinistra con la velocità di 200 m/s. Determina: (1) la velocità del relitto B, (2) la velocità relativa di A rispetto a B, (3) la velocità dei due rispetto al CM, (4) l'energia cinetica finale e confrontala con quella iniziale e spiega quindi perché non si conserva. [R: $500 \text{ m/s}; 700 \text{ m/s}; -500 \text{ m/s}, 200 \text{ m/s}, 2.47\times 10^7 \text{ J}, 1.80\times 10^7 \text{ J}$]



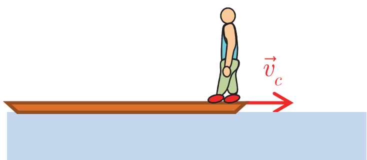
36. Un cannone di massa $m_c = 250 \text{ kg}$ spara un proiettile di $m_p = 10.0 \text{ kg}$ tenendo l'imboccatura inclinata di $30.0°$ verso l'alto. Il vettore velocità iniziale del proiettile misurato rispetto al terreno ha intensità 500 m/s. Si calcoli la velocità di rinculo del cannone e la velocità relativa del proiettile rispetto al cannone nell'istante del lancio. [R: $-8.66 \text{ m/s}; 485 \text{ m/s}$]



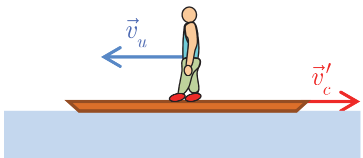
37. Un bambino di massa $m_b = 40.0 \text{ kg}$ si tuffa con inclinazione $\alpha = 50.0°$ da una piattaforma galleggiante, ferma, di massa $m_p = 100 \text{ kg}$. Sapendo che la piattaforma rincula con velocità tutta orizzontale di intensità $|\vec{v}_p| = 1.41 \text{ m/s}$ si trovi la massima altezza che il bambino raggiunge nel tuffo. [R: 0.900 m]



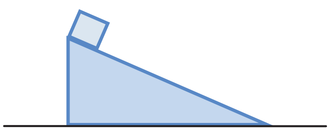
38. Sulle rotaie si trova un carrello di massa $m_c = 50.0 \text{ kg}$ inizialmente fermo con sopra all'estremità di sinistra un uomo di massa $m_u = 80.0 \text{ kg}$. Se l'uomo inizia a camminare verso destra con una velocità che relativamente al carrello vale 0.400 m/s, si trovi con quale velocità nel riferimento solidale alle rotaie si muovono il carrello e l'uomo. [R: $-0.246 \text{ m/s}, 0.154 \text{ m/s}$]



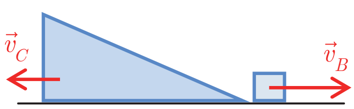
39. In relazione al problema precedente, se il carrello è lungo $d = 4.00 \text{ m}$ si dica di quanto si è spostato il suo CM quando la posizione dell'uomo è a metà della lunghezza totale. Cosa è successo invece al CM del sistema formato dall'uomo e dal carrello? [R: 1.23 m]



40. Una chiatta di massa $m_c = 270 \text{ kg}$ lunga 15.0 m sta viaggiando su di un lago con $|\vec{v}_c| = 5.00 \text{ m/s}$ e sopra un uomo di massa $m_u = 80.0 \text{ kg}$. L'uomo, inizialmente fermo all'estremità di destra, s'incammina in direzione contraria al moto con velocità che rispetto alla terra vale $|\vec{v}_u| = 0.800 \text{ m/s}$. Quant'è la nuova velocità $\vec{v}'_c$ della chiatta rispetto alla terra? [R: 4.34 m/s]



41. Un blocco di ghiaccio di massa $m_B = 2.00 \text{ kg}$ scivola lungo un cuneo anch'esso di ghiaccio, di massa $m_C = 9.00 \text{ kg}$ come in figura, partendo da un'altezza $h = 0.800 \text{ m}$ (quota del CM). Considerando nullo ogni tipo di attrito, si calcoli la velocità con la quale sta rinculando il cuneo nell'istante in cui il blocco ha raggiunto terra. [R: 0.796 m/s]



42. Un esploratore si trova bloccato su di una slitta nel mezzo di un lago ghiacciato. Poiché è assente qualunque attrito con la superficie del lago, per spostarsi decide di lanciare il suo zaino in verso opposto a quello in cui vuole muoversi. Sapendo che lo zaino ha massa $m = 10.0 \text{ kg}$ e che la massa della slitta e dell'uomo valgono complessivamente $M = 130 \text{ kg}$, si dica a che velocità si muove l'uomo se egli vede lo zaino allontanarsi a 2.50 m/s. [R: 0.179 m/s]

43. Un oggetto di massa $M = 9.00\ \text{kg}$ viaggia verso NORD-EST alla velocità $|\vec{V}| = 3.00\ \text{m/s}$. Un'esplosione interna lo frammenta in tre pezzi, il primo dei quali di massa $m_1 = 3.50\ \text{kg}$ si muove verso EST alla velocità $|\vec{v}_1| = 8.00\ \text{m/s}$, ed il secondo di $m_2 = 2.50\ \text{kg}$ verso NORD con velocità $|\vec{v}_2| = 9.00\ \text{m/s}$. Calcola direzione, verso ed intensità della velocità del terzo pezzo e l'energia liberata nell'esplosione.

[R: $(2.97\ \text{m/s OVEST}; 1.14\ \text{m/s SUD}); 194\ \text{J}$]

3. Gli urti centrali

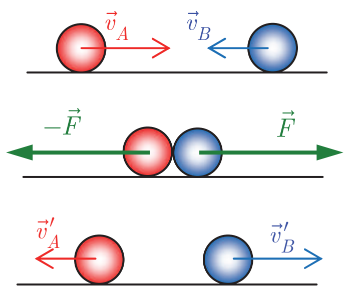
Il termine *urto* in fisica viene utilizzato per indicare *un'azione repulsiva molto breve rispetto alla durata dell'intero fenomeno*. Si osservano collisioni di questo tipo sia sulla scala microscopica, ad esempio fra le molecole di un gas, sia sulla scala degli oggetti, come un pallone che colpisce un muro, o due palle da biliardo che si scontrano. In tutti i casi l'interazione è concentrata in un intervallo Δt piccolo, prima e dopo il quale i corpi coinvolti non si influenzano più.

Cosa sono le forze impulsive?

Le forze con cui i corpi coinvolti si respingono per la durata Δt dell'urto sono molto più intense di ogni altra azione esterna, così che la variazione della quantità di moto subita nella collisione è molto maggiore di quelle che hanno luogo in altri intervalli di pari durata. Queste proprietà vengono riassunte dicendo che la repulsioni durante un urto sono *forze impulsive*.

Cosa succede alla quantità di moto dei corpi durante un urto?

In un sistema di due corpi che urtano, rispetto all'elevata intensità delle forze impulsive, deve considerarsi trascurabile ogni eventuale azione esterna, ad esempio quella della gravità o delle forze normali del piano di appoggio. Inoltre le forze impulsive sono tutte interne al sistema stesso, e poiché la terza legge della dinamica prevede che la loro somma sia nulla, durante un urto le particelle esercitano un impulso uguale e contrario l'una sull'altra, e la quantità di moto complessiva resta la stessa prima e dopo. Oppure, che è lo stesso, la variazione di $\vec{p}$ è nulla:



$$\Delta \vec{p}_{totale} = 0$$

Durante un urto si conserva l'energia del sistema?

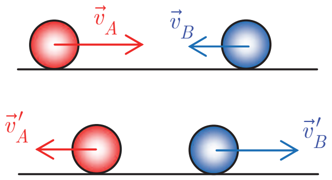
Dipende dal tipo di urto. Vi sono degli urti, detti *elastici*, in cui l'energia complessiva del sistema dei due corpi ha lo stesso valore prima e dopo la collisione. Quando viceversa tale conservazione energetica non ha luogo, l'urto si dice *anelastico*. In particolare un urto in cui i corpi rimangono attaccati insieme, come esempio una pallina di plastilina scagliata contro un muro, è detto *perfettamente anelastico*.

Che direzione hanno le forze impulsive durante l'urto?

Qui considereremo solo i casi più semplici, come quello dell'urto di due sfere omogenee come palle da biliardo, in cui le forze repulsive *sono dirette sempre lungo la congiungente i due CM* e l'urto è detto *centrale*. In generale tuttavia questa condizione non si verifica, specie quando agiscono forze di attrito nel punto di contatto, e l'urto è allora chiamato *obliquo*.

Che relazione c'è fra le velocità prima e dopo in un urto centrale elastico?

Prendiamo in esame un urto *centrale elastico* fra due corpi A e B nel caso più semplice in cui tutto si svolge in una sola dimensione. Questo accade quando sin da prima dell'urto i due vettori velocità giacciono lungo la retta congiungente i centri di massa degli oggetti. Tale retta conterrà anche i vettori velocità dopo, perché in un urto centrale, non essendoci forze perpendicolari alla congiungente, non potremo ritrovarci con quantità di moto in direzione ad essa perpendicolare. Prendiamo quindi due sferette omogenee destinate a scontrarsi, scegliamo la direzione della congiungente i CM come asse delle ascisse, ed indichiamo con v_A e v_B le componenti delle velocità lungo quest'asse prima dell'urto, e con v'_A e v'_B quelle dopo l'urto[2]. Gli stati prima e dopo sono legati dalla conservazione della quantità di moto e dalla conservazione dell'energia:



quantità di moto: $$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B$$

energia: $$\frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} m_A v'^2_A + \frac{1}{2} m_B v'^2_B$$

Riscriviamo entrambe le formule portando tutte le grandezze relative alla massa A al primo membro e quelle della B al secondo:

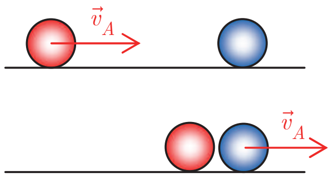
quantità di moto: $$m_A \left(v_A - v'_A\right) = m_B \left(v_B - v'_B\right)$$

energia: $$m_A \left(v_A - v'_A\right)\left(v_A + v'_A\right) = m_B \left(v_B - v'_B\right)\left(v_B + v'_B\right)$$

dividendo a membro a membro si ha $v_A + v'_A = v_B + v'_B$ che può riscriversi:

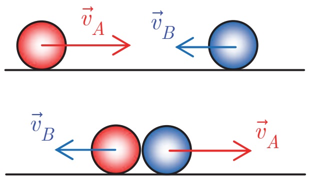
$$v_A - v_B = -(v'_A - v'_B)$$

cioè in un urto elastico in una dimensione la velocità *relativa* di un corpo rispetto all'altro non cambia.



(1) *una sfera è ferma*

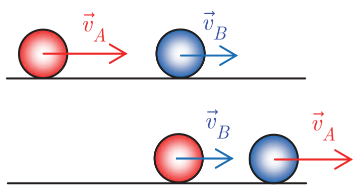
Quindi la velocità $v_A - v_B$ con cui B vede avvicinarsi A prima della collisione, è uguale a quella $v'_A - v'_B$ con cui, dopo, B vede A allontanarsi. Il segno negativo nella formula indica che *la velocità di avvicinamento ha verso opposto a quella di separazione*.



(2) *velocità in versi opposti*

Che succede nella situazione semplice in cui le due masse sono uguali?

Se le sfere sono uguali, possono presentarsi solo tre casi: (1) una delle due è ferma; (2) le velocità hanno verso opposto; (3) le velocità hanno lo stesso verso, con quella dietro più veloce. Si dimostra facilmente che in tutte e tre le *situazioni il risultato dell'urto è che le due sfere si scambiano le velocità* (e quindi le energie e le quantità di moto). Infatti, dovendo essere costante la velocità relativa, se una delle due sfere è all'inizio ferma, dopo l'urto dovrà essere ferma quella che era in moto. Analogamente se procedono una contro l'altra od una a tamponare l'altra da dietro, l'unico modo affinché la velocità relativa non vari è che i vettori velocità si scambino.



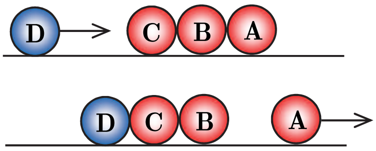
(3) *velocità di ugual verso*

Esercizi

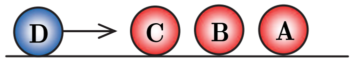
44. Una sfera di massa m procede su di un piano alla velocità di 3.0 m/s. Si dica cosa succede se essa urta elasticamente (in una dimensione) una seconda sfera identica davanti a lei, considerando i casi in cui: (a) la seconda sfera sia ferma; (b) la seconda proceda contro la prima a velocità 4.0 m/s; (c) proceda nello stesso verso della prima a velocità 2.0 m/s.

[2] Per tutte le grandezze fisiche dopo l'urto useremo la convenzione di mantenere il nome prima dell'urto e di apporre l'apice. Ove il significato sia chiaro, ometteremo i pedici x e y nelle componenti vettoriali ed il simbolo di modulo nell'intensità dei vettori per non appesantire la notazione.

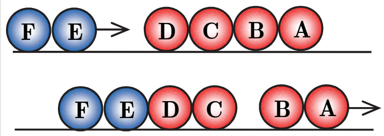
Essendo le due sfere identiche e l'urto elastico, in tutti e tre i casi si scambiano le velocità. Pertanto dopo l'urto, in tutti e tre i casi proposti la seconda sfera avanza nel verso originario della prima a velocità 3.0 m/s . Per quanto riguarda la prima sfera abbiamo che :
(a) si ferma;
(b) avanza contro il verso originario a velocità 4.0 m/s ;
(c) avanza nel verso originario a velocità 2.0 m/s .



45. Si hanno quattro sfere identiche A, B, C e D, delle quali A, B e C sono a contatto e D urta elasticamente contro la prima di esse, C, come in figura. Dopo l'urto si osserva che D si arresta, e C e B restano ferme anch'esse. Soltanto A emerge dalla parte opposta con la velocità che aveva D prima dell'impatto. Come si spiega il fenomeno?



Per capire cosa accade, supponiamo che A, B e C non si tocchino, ma che vi sia fra loro una piccola distanza di separazione. In tal caso abbiamo visto che quando D urta C si scambiano le velocità e C riparte con la velocità di D. Analogamente C scambia la sua velocità con B e si arresta, ed infine B si arresta scambiandola con A, che riparte alla velocità originaria. Il meccanismo è analogo se le sfere sono a contatto, e non dipende dal numero di sfere coinvolte.



46. Ci sono sette sfere identiche sul piano, delle quali A, B, C, D sono ferme a contatto, mentre E ed F, sempre in contatto, avanzano insieme a velocità costante. Quando E ed F urtano la fila ABCD si osserva che dal lato opposto emergono A e B con la velocità originale, mentre rimane fermo il blocco FEDC. Spiegare questo fenomeno ripetendo il ragionamento fatto nell'esercizio precedente. [R]

E nel caso generale in cui le masse sono differenti?

Immaginiamo di iniziare a correre con una velocità tale che nel nostro riferimento *la quantità di moto totale del sistema risulti zero*. Si tratta, come sappiamo, della velocità v_{CM} del centro di massa del sistema, che nella direzione lungo cui avviene l'urto si scrive:

$$v_{CM} = \frac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B}$$

Mentre stiamo correndo a velocità v_{CM}, le sfere ci appaiano muoversi con velocità $v - v_{CM}$ (dove al posto di v sostituiamo v_A oppure v_B). Il vantaggio di osservare le cose da questo particolare sistema di riferimento, è che in esso, *durante l'urto, la velocità di ciascuna particella mantiene la sua intensità e semplicemente cambia il suo verso.* Dimostriamo quest'importante proprietà osservando che la quantità di moto totale del sistema $m_A v_A + m_B v_B = 0$ si deve conservare, cioè *dev'essere zero anche dopo l'urto, come lo era prima di esso*. Pertanto nel sistema del *CM* le quantità di moto delle due masse sono *sempre* uguali ed opposte:

$$p_A = m_A v_A = -m_B v_B = -p_B$$

La Controfisica

Potremmo anche ragionare chiedendoci *se* esiste una V tale che in un riferimento in moto a velocità V *la quantità di moto totale risulta nulla.* Applicando le trasformazioni di Galileo, le velocità delle due masse in tale riferimento sono:

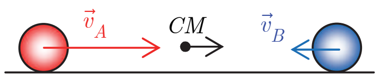
$$v_A - V \quad \text{e} \quad v_B - V.$$

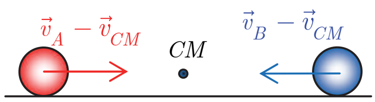
Scriviamo la quantità di moto totale ed imponiamo che sia nulla:

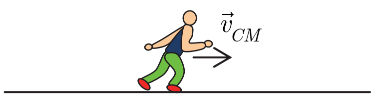
$$m_A(v_A - V) + m_B(v_B - V) = 0$$

e risolvendo rispetto a V si trova che essa è la velocità del CM:

$$m_A v_A + m_B v_B = (m_A + m_B)V$$



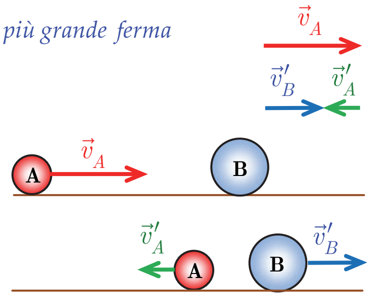




Questa condizione può essere soddisfatta solo cambiando il verso delle velocità dopo l'urto e mantenendone inalterata l'intensità. Perché se tentassimo di farlo rendendo i valori di v_A e v_B entrambi più grandi o più piccoli di uno stesso fattore, questo comporterebbe un aumento od una diminuzione dell'energia totale, impossibile in un urto elastico. Quindi dopo l'urto, nel sistema del CM le particelle hanno velocità opposta a prima, e cioè $v_{CM} - v$. Se adesso smettiamo di correre alla velocità del CM, e torniamo al riferimento iniziale del laboratorio, per passare da questo valore alla velocità v' che le particelle hanno dopo l'urto rispetto al laboratorio, dobbiamo solo aggiungere il valor v_{CM} che prima abbiamo sottratto e così risulta $v' = 2v_{CM} - v$, oppure in forma più semplice:

> Nell'urto elastico in una dimensione, la media aritmetica fra la velocità iniziale v e quella finale v' di ciascun oggetto è pari alla velocità v_{CM} del centro di massa:
>
> $$v_{CM} = \frac{1}{2}(v + v')$$

urto contro una massa più grande ferma



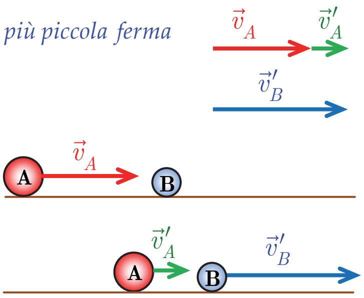
A titolo di esempio consideriamo il caso semplice in cui una sfera A urti contro la B che si trova ferma. Le velocità con cui emergono dall'urto sono in tal caso:

$$v'_A = 2v_{CM} - v_A = 2\,\frac{m_A v_A + \cancel{m_A v_A}}{m_A + m_B} - v_A = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}v_A$$

$$v'_B = 2v_{CM} - \cancel{v_B} = \frac{2m_A}{m_A + m_B}v_A$$

E come si vede, *la sfera A rimbalza all'indietro se urta contro una B ferma di massa maggiore*, perché si avrebbe $m_A - m_B < 0$ che comporta segno opposto fra v_A e v'_A, mentre *avanza a velocità ridotta se urta contro una massa ferma minore.* Per visualizzare riscriviamo la formula $v_A - v_B = -(v'_A - v'_B)$ che lega le velocità relative nel caso particolare in cui B è ferma. Ricordando che tutte le velocità stanno sulla stessa retta, la relazione è anche fra i vettori:

urto contro una massa più piccola ferma



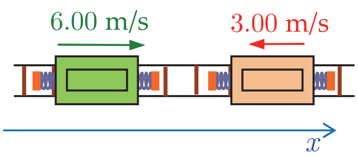
$$\vec{v}'_B = \vec{v}_A + \vec{v}'_A$$

Posta in tale forma, la relazione fra le velocità prima e dopo è rappresentabile col metodo di punta coda, come in figura.

E quando nell'urto non si conserva l'energia?

Nell'urto anelastico parte dell'energia meccanica manca nel bilancio in quanto viene trasferita al livello di agitazione molecolare, cambiando *l'energia interna*, pertanto la conservazione dell'*energia meccanica* non è più soddisfatta. Questo problema non può essere affrontato in generale a meno di conoscere la frazione di energia che i corpi hanno perduto. Tuttavia è molto semplice impostare il problema dell'urto *completamente anelastico*, nel quale i due oggetti dopo la collisione rimangono uniti. In questo caso, dalla conservazione della quantità di moto si ha che i corpi procedono con la stessa velocità, che è anche quella del CM sia prima che dopo l'urto, come si capisce ponendo $v_A = v_B$ nella formula per v_{CM}. Risulta quindi:

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B = (m_A + m_B)v_{CM}$$



Esercizi

47. Un carrello di massa $m_A = 5.00$ kg che avanza lungo un binario a 6.00 m/s si scontra con un secondo carrello di massa $m_B = 3.00$ kg che procede in verso contrario a 9.00 m/s. Sapendo che le molle dei respingenti rendono l'urto elastico, si trovino le velocità dei carrelli dopo la collisione e si verifichi che la velocità relativa nell'urto cambia solo il segno.

Scegliendo un riferimento orientato come la velocità del primo carrello abbiamo $v_A = 6.00$ m/s e $v_B = -9.00$ m/s. Calcoliamo la velocità del centro di massa dei due carrelli in moto:

$$v_{CM} = \frac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B} = \frac{5.00 \times 6.00 + 3.00 \times (-9.00)}{5.00 + 3.00} \text{ m/s} = 0.375 \text{ m/s}$$

e da questa le nuove velocità dopo l'urto:

$v'_A = 2v_{CM} - v_A = (2 \times 0.375 - 6.00) \text{ m/s} = -5.25 \text{ m/s}$

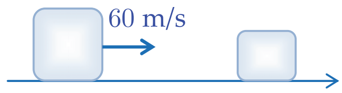
$v'_B = 2v_{CM} - v_B = [2 \times 0.375 - (-9.00)] \text{ m/s} = 9.75 \text{ m/s}$

La velocità relativa prima dell'urto vale:

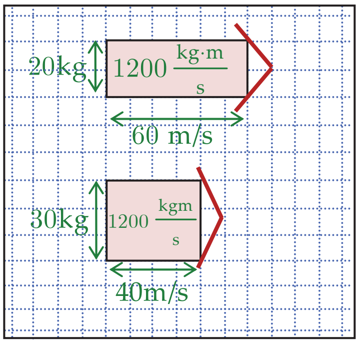
$v_A - v_B = [6.00 - (-9.00)] \text{ m/s} = 15.00 \text{ m/s}$

quella dopo l'urto:

$v'_A - v'_B = (-5.25 - 9.75)\text{m/s} = -15.00 \text{ m/s}$



48. Sopra al pack del polo nord un blocco di ghiaccio di massa $m_A = 20$ kg che sta scivolando alla velocità di 60 m/s ne urta un altro di massa metà, inizialmente fermo. Calcolare la velocità che hanno i due blocchi dopo la collisione se questi rimangono uniti e la frazione di energia dissipata nell'urto. Nella collisione è cambiata la velocità del CM?



La situazione è facilmente visualizzabile nella rappresentazione della quantità di moto con le frecce spesse: prima della collisione si ha un rettangolo di base 60 m/s ed altezza 20 kg, pari ad una quantità di moto complessiva di 1200 kg · m/s. Dopo alla massa si sono aggiunti i 10 kg del secondo blocco e dovendo l'area totale del rettangolo rimanere la stessa la velocità che corrisponde all'altezza deve ridursi a 40 m/s. Algebricamente questa condizione di conservazione della quantità di moto si scrive:

$p_{in,x} = m_A v_{Ax} = 20 \times 60 \text{ kg m/s} = 1200 \text{ kg m/s}$

$p_{fin,x} = 1200 \text{ kg m/s} = (m_A + m_B) v_{fin,x} = (30 \text{ kg}) v_{fin,x}$

$v_{fin,x} = (1200 \text{ kg m/s})/(30 \text{ kg}) = 40 \text{ m/s}$

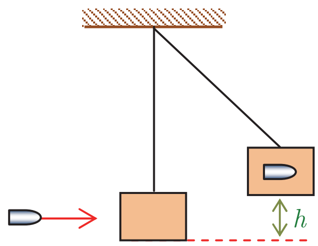
L'energia dissipata nell'urto si calcola facendo la differenza fra l'energia cinetica prima e dopo la collisione:

$K_{in} = \frac{1}{2} m_A v_{Ax}^2 = \frac{1}{2} \times 20 \times 60^2 \text{ J} = 3.6 \times 10^4 \text{ J}$

$K_{fin} = \frac{1}{2}(m_A + m_B) v_{fin,x}^2 = \frac{1}{2} \times 30 \times 40^2 \text{ J} = 2.4 \times 10^4 \text{ J}$

$K_{in} - K_{fin} = (3.6 - 2.4) \times 10^4 \text{ J} = 1.2 \times 10^4 \text{ J}$

Poiché la risultante delle forze esterne (gravità e normale) è rimasta nulla durante la collisione non può essere cambiata la velocità del centro di massa, che coincide con il valore finale di velocità trovato $v_{CMx} = 40$ m/s.



49. Il dispositivo qui a fianco, noto come *pendolo balistico* si utilizza per misurare la velocità dei proiettili. Se un proiettile di $m = 10.0$ g fa sollevare di un tratto $h = 12.0$ cm il blocchetto appeso, che ha $M = 2.10$ kg, si calcoli la velocità con la quale si è conficcato.

L'urto è completamente anelastico: lungo un asse orizzontale orientato a destra, indichiamo con v, V' le componenti delle velocità del proiettile prima dell'urto e del pendolo immediatamente dopo l''urto, ed imponiamo la conservazione della quantità di moto:

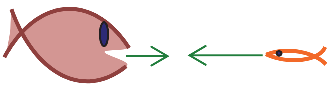
$$mv = (m+M)V' \;\Rightarrow\; V' = \frac{m}{m+M} v$$

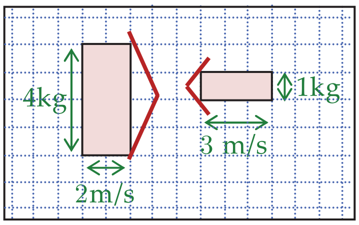
Nella fase di salita si conserva l'energia meccanica, dato che non lavora alcuna forza non conservativa. Ponendo lo zero dell'energia potenziale nel punto più basso del pendolo si ha:

$$\Delta U + \Delta K = 0 = [(m+M)gh - 0] + [\tfrac{1}{2}(m+M)(V')^2 - 0]$$

$$\frac{1}{2}\cancel{(m+M)}\left(\frac{m}{m+M}v\right)^2 = \cancel{(m+M)}gh$$

$$v = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gh} = \left(\frac{0.010+2.10}{0.010}\right)\sqrt{2\times 9.81\times 0.120}\ \text{m/s} = 324\ \text{m/s}$$

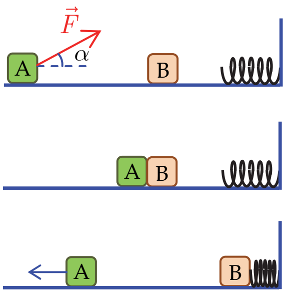




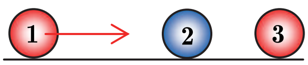
50. Un grosso pesce di massa $M = 4.00$ kg nuota con velocità $|\vec{V}| = 2.00$ m/s. Un pesciolino di massa $m = 1.00$ kg che procede andandogli incontro a velocità $|\vec{v}| = 3.00$ m/s viene ingoiato dal pesce grosso. Determina la velocità del pescione dopo il pasto, e rappresenta la situazione dopo l'urto col metodo delle frecce spesse.
[R: 1.00 m/s]

51. Una palla di massa $m = 1.30$ kg che viaggia a 8.50 m/s colpisce un carrello di massa $M = 15.0$ kg e ribalza indietro alla velocità di 3.50 m/s, mettendo in movimento il carrello nel verso originale di avanzamento. Si dica se si è trattato di un urto elastico.
[R: No]

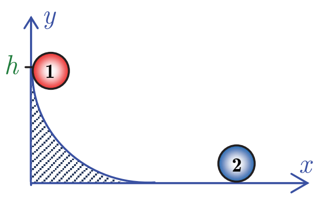
52. Due blocchetti, il primo di massa $m_A = 4.50$ kg ed il secondo di massa $m_B = 3.50$ kg, procedono l'uno contro l'altro. Fissato un asse delle ascisse come in figura, si ha che le componenti delle velocità lungo di esso sono $v_A = 5.00$ m/s e $v_B = -4.00$ m/s Sapendo che fra loro ha luogo un urto completamente anelastico, si calcoli la velocità dei blocchetti dopo l'urto e l'energia che viene dissipata dall'urto.
[R: 1.06 m/s, 79.8 J]



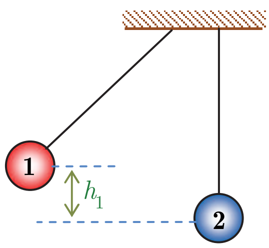
53. Un blocchetto inizialmente fermo, di massa $m_A = 4.50$ kg, viene tirato su un piano orizzontale senz'attrito, per un tratto di 60.0 cm, da una forza di 120 N, inclinata di $\alpha = 25°$. Poco dopo che la forza ha cessato di agire, il blocco ne urta in modo elastico un secondo, di massa $m_B = 2.00$ kg, e questo viene arrestato da una molla di costante $k = 25000$ N/m. Calcolare la velocità con cui il blocco B giunge alla molla, e di quanto essa si comprime nell'istante di massimo schiacciamento.
[R: 7.46 m/s, 6.67 cm]



54. Si hanno tre biglie allineate, la prima in moto con velocità 4.50 m/s verso la seconda, e le altre due ferme. Sapendo che $m_1 = 2m_2 = m_3$ e che dopo che la prima ha urtato la seconda elasticamente, questa a sua volta urta elasticamente la terza, calcolare le velocità finali.
[R: 1.50 m/s; 2.00 m/s; 4.00 m/s]

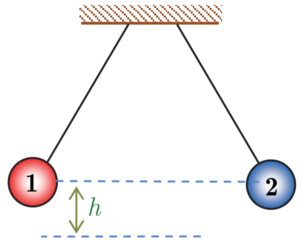


55. Una sferetta di massa $m_1 = 2.50$ kg viene lasciata cadere da un'altezza $h = 5.00$ m lungo un guida curva che l'accompagna su di un piano, dove urta elasticamente una seconda sfera di massa $m_2 = 4.50$ kg. Si calcoli la velocità con cui m_2 si mette in moto e l'altezza alla quale risale m_1 lungo la guida.
[R: 7.08 m/s; 0.925 m]

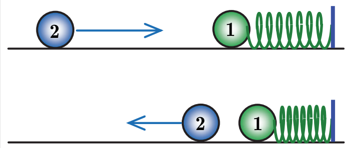


56. Due sfere di masse m_1 ed $m_2 = 2m_1$ sono sospese per due fili della stessa lunghezza e formano due pendoli che si toccano in posizione di riposo. La sfera m_1 viene sollevata ad un'altezza $h_1 = 15.0$ cm e lasciata andare da ferma, ed urta elasticamente m_2 nel punto più basso. Calcolare le altezze massime a cui risalgono entrambe dopo l'urto.
[R: 1.67 cm; 6.67 cm]

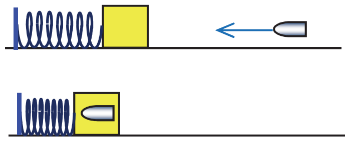
57. Due sfere di masse m_1 ed $m_2 = 2m_1$ sono sospese per due fili della stessa lunghezza e formano due pendoli che si toccano in posizione di riposo. Entrambe sono lasciate andare da ferme da un'altezza $h = 18.0$ cm e si urtano elasticamente nel punto più basso. Calcolare le altezze massime a cui risalgono entrambe dopo l'urto.
[R: 32.0 cm; 2.00 cm]



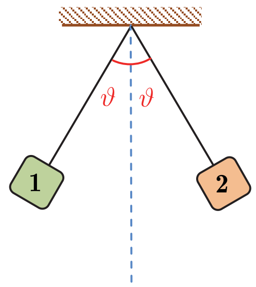
58. Una sfera di massa $m_1 = 0.400$ kg è agganciata ad una molla orizzontale in posizione di riposo. Contro di essa urta elasticamente una seconda sfera $m_2 = 0.300$ kg alla velocità di 5.00 m/s. Sapendo che la molla si comprime di un tratto $x = 7.50$ cm, calcolare il periodo delle oscillazioni che si innescano. [R: 0.348 s]



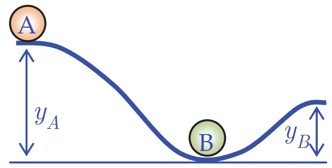
59. Un proiettile di massa $m = 10.0$ g si conficca in un blocchetto di massa $M = 5.000$ kg agganciato ad una molla orizzontale in posizione di riposo, che si comprime di $x = 6.00$ cm e poi oscilla con un periodo di 1.50 s. Calcolare la velocità che aveva il proiettile. [R: 126 m/s]



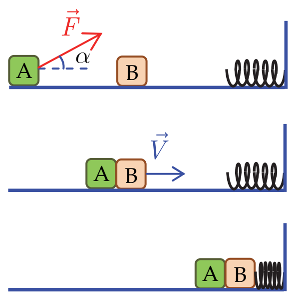
60. Una particella di massa m_1 in moto a velocità $\vec{v}$ urta in modo completamente anelastico una seconda particella ferma di massa m_2. Calcolare quanto deve essere il rapporto fra le due masse affinché nell'urto si perda solo il 30.0% dell'energia cinetica. [R: 7/3]



61. Due blocchi di plastilina di masse m_1 ed $m_2 = \frac{1}{2}m_1$, sono sospesi ad un unico punto per due fili della stessa lunghezza L. Lasciati andare da un uguale angolo $\vartheta = 30.0°$ si incollano nel punto più basso. Calcolare l'angolo al quale risalgono dopo l'urto e la percentuale di energia dissipata nell'urto. [R: $22.3°$ *a destra*, 43.75%]

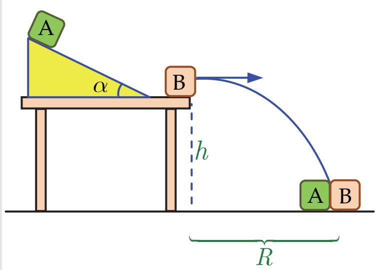


62. Una sferetta di $m_A = 2.00$ kg viene lasciata andare da un'altezza $y_A = 4.00$ m giù per un profilo curvo, dove scivola senza rotolare. In fondo urta elasticamente una sferetta di massa $m_B = 2.40$ kg che si mette in moto risalendo una collinetta di altezza $y_B = 1.80$ m. Calcolare la velocità di B in cima alla collina. [R: 5.35 m/s]

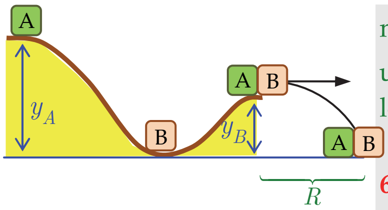


63. Un blocchetto di massa $m_A = 3.50$ kg viene tirato lungo un piano orizzontale privo di attrito da una forza $\vec{F}$ inclinata di $20.0°$ d'intensità 100 N per un tratto lungo 40.0 cm. Poco dopo che la forza cessa di agire il blocchetto urta in modo completamente anelastico un secondo blocco fermo avente massa $m_B = 2.50$ kg, e dopo l'urto i due vengono arrestati da una molla che nell'istante di massimo schiacciamento si comprime di 6.00 cm. Calcolare la costante elastica della molla.
[R: 1.22×10^4 N/m]

64. In un urto completamente anelastico fra due blocchetti di masse $m_A = 4.50$ kg ed m_B, l'incremento di energia interna del sistema è 100 J. Sapendo che prima dell'urto le due masse procedevano l'uno contro l'altro a velocità $v_A = 5.00$ m/s e $v_B = -3.00$ m/s, calcolare m_B. [R: 10.2 kg]

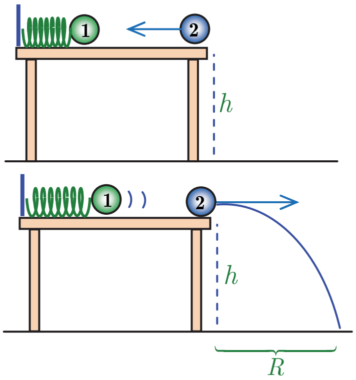


65. Una massa $m_A = 5.00$ kg inizialmente ferma, scivola giù per un cuneo inclinato di $\alpha = 35°$ lungo $L = 2.00$ m, posto sopra ad un tavolino alto $h = 1.50$ m, perdendo il 30.0% dell'energia per attrito. In fondo al cuneo essa urta, in modo completa-



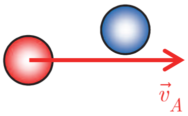
mente anelastico, una massa $m_B = 4.00\ \text{kg}$, e i due blocchetti insieme descrivono una traiettoria di caduta libera oltre il tavolino, partendo con velocità tutta orizzontale. Calcolarne la gittata R. [R: $1.22\ \text{m}$]

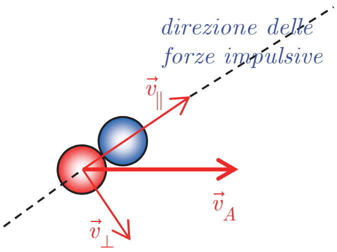
66. Una massa $m_A = 5.00\ \text{kg}$ inizialmente ferma, scivola senza attrito giù per un profilo curvo partendo ferma da quota $y_A = 6.00\ \text{m}$. Nel punto più basso essa urta in modo completamente anelastico, una massa $m_B = 2.00\ \text{kg}$, ed i due blocchetti insieme risalgono fino a quota $y_B = 3.00\ \text{m}$ dove escono dal profilo descrivendo una traiettoria di caduta libera, partendo con velocità tutta orizzontale. Calcolarne la gittata R. [R: $0.597\ \text{m}$]



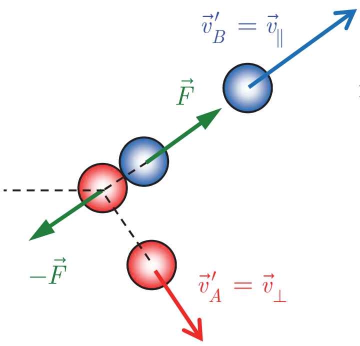
67. Una massa $m_1 = 0.500\ \text{kg}$ è agganciata ad una molla orizzontale in posizione di riposo, posta sopra ad un tavolo senza attrito, alto $h = 1.20\ \text{m}$. Contro di essa urta elasticamente una seconda massa $m_2 = 0.400\ \text{kg}$ alla velocità di $6.00\ \text{m/s}$. Sapendo che la molla si comprime fino a un tratto $x = 8.00\ \text{cm}$, calcolare il periodo delle oscillazioni che si innescano. Calcolare la gittata R della massa m_2 che, dopo l'urto, procede in direzione opposta e cade dal tavolo partendo con velocità orizzontale. [R: $0.940\ \text{s}, 33.0\ \text{cm}$]

Che cosa accade quando un urto centrale elastico si sviluppa in due dimensioni?

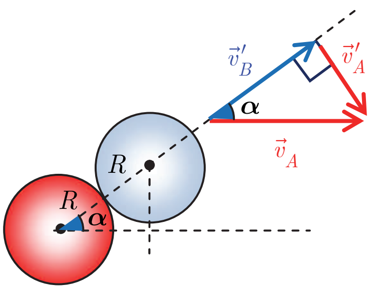




Nel caso in cui le due velocità iniziali non giacciano sulla stessa retta, *l'urto centrale si sviluppa in due dimensioni*, cioè le velocità finali si trovano sempre nel piano dove giacevano quelle iniziali, ma le loro direzioni vanno individuate di volta in volta. I risultati trovati per l'urto in una dimensione (cioè: (1) conservazione della quantità di moto, (2) per l'urto elastico, cambio solo nel segno della velocità relativa, (3) velocità del CM pari alla media delle velocità prima e dopo) continuano ad essere validi se *applicati alle componenti* delle grandezze fisiche lungo gli assi di un riferimento. Un caso semplice di particolare interesse, è quello della palla da biliardo che ne colpisce un'altra identica inizialmente ferma, in una collisione non frontale, ma come si dice, "di striscio". Individuiamo la direzione delle forze impulsive, che in un urto centrale è quella che unisce i CM *nell'istante in cui le sfere sono a contatto*, e scomponiamo la velocità $\vec{v}_A$ della palla in moto, nella sua componente $\vec{v}_\parallel$ parallela a questa direzione, e nella componente $\vec{v}_\perp$ ad essa ortogonale. Sulla retta che unisce i centri si presenta la stessa situazione dell'urto centrale in una dimensione, e le due sfere, in quanto uguali, si scambiano le velocità lungo questa direzione: la sfera B esce dall'urto con velocità uguale a $\vec{v}_\parallel$ mentre la sfera A non ha velocità in tale direzione in quanto non l'aveva B. Perpendicolarmente alla direzione delle forze impulsive invece, non agiscono forze per definizione, e così si conserva la quantità di moto: la sfera A esce dall'urto con la componente $\vec{v}_\perp$ inalterata, mentre B non acquista alcuna velocità lungo tale retta. In conclusione la sfera B esce dall'urto in direzione parallela alla congiungente i centri mentre la sfera A esce in direzione perpendicolare pertanto le due traiettorie sono ortogonali. Inoltre la conservazione dell'energia nel caso di sfere identiche si riduce al teorema di Pitagora:



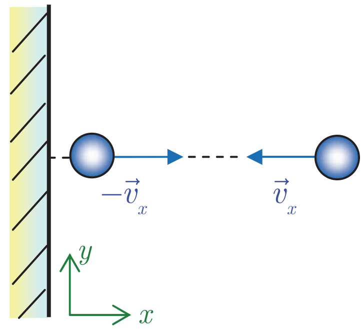
$$\tfrac{1}{2}\cancel{m}\left|\vec{v}_A\right|^2 = \tfrac{1}{2}\cancel{m}\left|\vec{v}'_A\right|^2 + \tfrac{1}{2}\cancel{m}\left|\vec{v}'_B\right|^2$$



che conferma come i tre vettori velocità siano lati di un triangolo rettangolo, che come si vede in figura, è simile a quello che ha per ipotenusa la congiungente i due CM delle sfere.

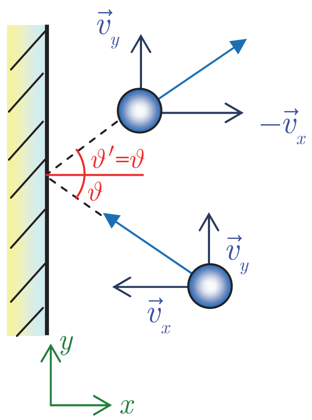
E quando urtano elasticamente due sfere di massa differente?

Il caso generale a due dimensioni, in cui le masse sono diverse ed entrambe le sfere risultano in movimento è complesso, tuttavia la strategia di scomporre le velocità nella direzione delle forze impulsive ed in quella ad essa perpendicolare continua ad essere efficace per la risoluzione di situazioni semplici.



Che cosa cambia se l'urto in due dimensioni è completamente anelastico?

Nell'urto completamente anelastico, gli oggetti restano attaccati dopo la collisione, e parte dell'energia viene trasferita al livello di agitazione molecolare, pertanto la conservazione della sola energia meccanica non è più soddisfatta. Resta sempre valido il principio universale della conservazione della quantità di moto, e che andrà applicato alle componenti lungo ciascuno degli assi cartesiani.

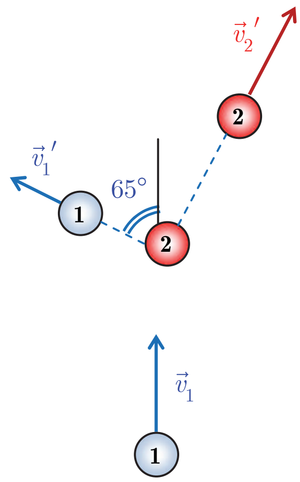


Di quali proprietà gode l'urto contro una parete?

Possiamo vedere l'urto di una massa puntiforme (o di una sfera) contro una parete come una situazione limite nella quale la massa del bersaglio è infinita. Quando una particella urta contro una parete, la forza che quest'ultima esercita su di lei ne modifica la quantità di moto. Si dice anche che la particella *cede quantità di moto alla parete*. Se l'urto è elastico la conservazione dell'energia impone che particella rimbalzi con velocità della stessa intensità di quella di provenienza, e in generale differente direzione. La situazione è particolarmente semplice nel caso in cui la direzione della velocità sia perpendicolare alla parete, e si assiste ad un ribaltamento della velocità. Osserviamo ora che in un urto elastico obliquo, ed uno perpendicolare, i corpi *cedono alla parete la stessa quantità di moto se hanno la stessa componente di velocità nella direzione perpendicolare alla parete*. Supponiamo infatti un urto elastico contro una parete posta a sinistra: la quantità di moto iniziale vale mv_x lungo x, e mv_y lungo y. Se la parete è priva di attrito e si limita a respingere la particella, *non esercitando azioni tangenziali*, l'urto *elastico* ha l'unico l'effetto di invertire la componente orizzontale della velocità, cioè i due angoli ϑ e ϑ' con la normale nel punto d'impatto sono uguali. La quantità di moto di una particella in un singolo urto cambia solo nella direzione perpendicolare alla parete, e la variazione è:

$$\Delta p_x = mv_x' - mv_x = -mv_x - mv_x = -2mv_x$$

Pertanto due urti in figura sono analoghi ai fini della violenza dell'impatto: quello che conta non è la direzione di incidenza contro la parete, ma solo l'intensità della componente di velocità perpendicolare ad essa.



Esercizi

68. Una palla da biliardo di massa $m_1 = 160$ g e velocità 3.00 m/s urta di striscio in modo elastico una seconda palla di massa $m_2 = m_1$. Sapendo che dopo l'urto la velocità della prima palla forma un angolo di $65.0°$ con la direzione originale, si trovi l'angolo a cui si mette in moto la seconda palla. Si verifichi la conservazione dell'energia nell'urto e si calcoli la percentuale di energia cinetica trasmessa alla seconda palla.

Con riferimento al disegno, sappiamo che le velocità $\vec{v}_1\,'$ e $\vec{v}_2\,'$ con le quali due sfere di uguale massa escono dall'urto sono perpendicolari. Quindi la seconda palla si mette in moto ad un angolo di $90.0° - 65.0° = 25.0°$.

I due vettori $\vec{v}_1\,'$ e $\vec{v}_2\,'$ sono pertanto cateti in un triangolo rettangolo in cui $\vec{v}_1$ è ipotenusa, di angoli acuti pari a $65.0°$ e $25.0°$:

$|\vec{v}_1'| = |\vec{v}_1| \sin 25.0° = (3.00 \sin 25.0°)\text{ m/s} = 1.27\text{ m/s}$

$|\vec{v}_2'| = |\vec{v}_1| \cos 25.0° = (3.00 \cos 25.0°)\text{ m/s} = 2.72\text{ m/s}$

Pertanto le energie cinetiche delle due palle prima e dopo l'urto risultano:

$K_1 = \frac{1}{2} m_1 \ |\vec{v}_1|^2 = (\frac{1}{2} \times 0.160 \times 3.00^2)\,\mathrm{J} = 0.720\,\mathrm{J}$

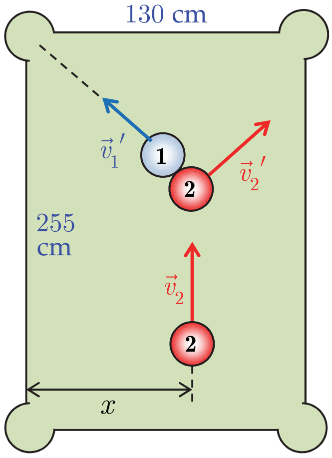
$K_1' = \frac{1}{2} m_1 \ |\vec{v}_1'|^2 = (\frac{1}{2} \times 0.160 \times 1.27^2)\,\mathrm{J} = 0.129\,\mathrm{J}$

$K_2' = \frac{1}{2} m_2 \ |\vec{v}_2'|^2 = (\frac{1}{2} \times 0.160 \times 2.72^2)\,\mathrm{J} = 0.592\,\mathrm{J}$

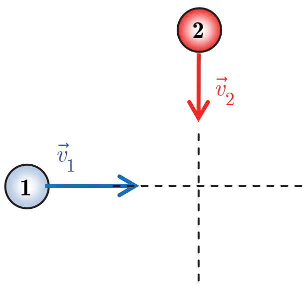
Risulta $K_1 = K_1{}' + K_2{}'$, nei limiti degli errori consentiti dai calcoli a tre cifre significative, cioè $K_1{}' + K_2{}' = (0.720 \pm 0.0005)\,\mathrm{J}$. Calcoliamo la percentuale di energia ceduta alla seconda palla:

$$100 \times \frac{K_2{}'}{K_1} = 100 \times \frac{\frac{1}{2}\cancel{m_2} \ |\vec{v}_2'|^2}{\frac{1}{2}\cancel{m_1} \ |\vec{v}_1|^2} = 82.2\%$$

69. Su un piano orizzontale una sfera in moto a velocità $|\vec{v}_1| = 6.00$ m/s urta di striscio, in modo elastico, una sfera uguale ferma. Sapendo che dopo l'urto il modulo della velocità della sfera urtata è triplo di quello della sfera urtante, si calcoli quanto sono distanti fra loro le due sfere quando sono passati 4.00 s dall'urto. [R: 24.0 m]



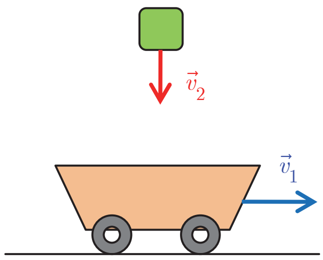
70. Sopra ad un tavolo da biliardo lungo 255 cm e largo 130 cm, in un punto a 2/3 della lunghezza ed 1/2 dell'altezza si trova il CM delle palla da biliardo (1) in figura, di raggio $R = 3.00$ cm. Calcolare a quale distanza x dalla *sponda lunga* si deve porre il CM di una palla identica (2) in figura, affinché tirandola parallelamente a tale sponda con velocità 2.80 m/s un urto elastico mandi la prima nella più vicina buca d'angolo. Calcolare la velocità con cui entra in buca. [R: 133 cm, 2.49 m/s]



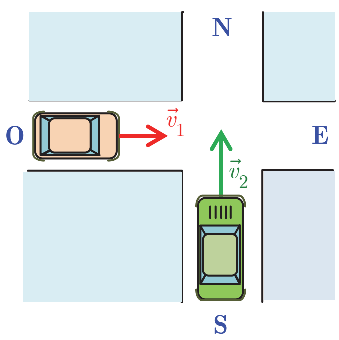
71. In un piano orizzontale, una sfera di massa $m_1 = 3.00$ kg avanza a velocità $\vec{v}_1$ di modulo 4.00 m/s. Ad un certo istante viene urtata elasticamente da una seconda sfera $m_2 = 2.00$ kg a velocità $\vec{v}_2$ di modulo 3.50 m/s e direzione perpendicolare alla prima, come in figura. Sapendo che nell'istante in cui avviene l'urto i due CM si trovano sulla retta che contiene $\vec{v}_2$, calcolare velocità delle sfere dopo l'urto.

[R: 4.88 m/s *deviata di* 40.0°; 0.70m/s *verticale*]

72. Due sfere aventi la prima massa $m_1 = 3.00$ kg e modulo della velocità 4.00 m/s, e la seconda massa $m_2 = 2.00$ kg e modulo della velocità 3.20 m/s si urtano di striscio in modo elastico, uscendone con velocità i cui moduli sono il primo metà del secondo. Calcolare tali velocità. [R: 2.49 m/s; 4.98m/s]



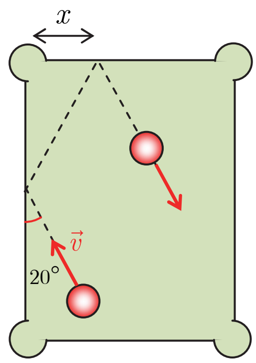
73. Sopra ad un vagone di massa $m_1 = 25.0$ kg che avanza orizzontalmente alla velocità di 9.00 m/s cade verticalmente un blocco di massa $m_2 = 10.0$ kg che un istante prima dell'impatto ha una velocità di 4.00 m/s. Calcolare la velocità del vagone dopo l'urto e l'energia dissipata dall'urto stesso. [R: 6.43 m/s; 370 J]



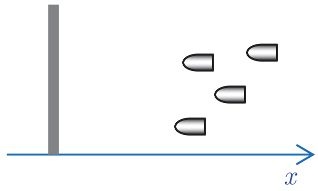
74. Due auto dirette la prima da OVEST verso EST e la seconda da SUD verso Nord, si scontrano ad un incrocio e dopo la collisione proseguono agganciate. Sapendo che $m_1 = 1500$ kg e $|\vec{v}_1| = 15.0$ m/s, che $m_2 = 1800$ kg e $|\vec{v}_2| = 20.0$ m/s si trovi la direzione ed il modulo della velocità dopo l'urto e l'energia dissipata.

[R: 58.0° *NordEst*; 12.9 m/s; 2.54×10^5 J]

75. Su di un tavolo da biliardo, una palla di massa $m = 0.200$ kg urta elasticamente e senza attrito, ad un angolo di $20.0°$ ed alla velocità di 3.50 m/s, il punto medio della sponda lunga. Sapendo che il tavolo è lungo 260 cm, si calcoli la distanza x dalla buca d'angolo alla quale viene colpita la sponda corta e l'intensità dell'impulso complessivamente esercitato sul tavolo nei due urti. [R: 1.41 N·s; 47.3 cm]

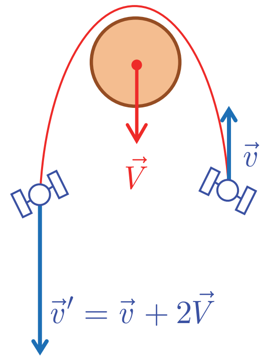


76. Una mitraglietta spara contro una lamina di acciaio dei pallini di massa 2.00 g alla velocità di 350 m/s ad un ritmo di 7 al secondo. Si calcoli la forza che subisce la lamina, sia nel caso in cui i pallini rimbalzino elasticamente nella stessa direzione, sia nel caso si conficchino. [R: 980 N; 490 N]



Cos'è l'effetto fionda?

Si tratta di un meccanismo sfruttato dalle sonde spaziali per accelerare senza consumare carburante, e che ha delle somiglianze con l'urto elastico. L'idea è quella di sfruttare la velocità del moto di rivoluzione di un pianeta intorno al Sole facendo "collidere" la sonda contro il pianeta per ottenerne il rimbalzo tipico di una piccola massa contro una massa grande. La sonda ne esce con una incrementata energia cinetica mentre il pianeta rallenta impercettibilmente. A differenza dell'urto però, non si ha uno "scontro frontale", ma la sonda viene lanciata dietro al pianeta e fatta girare attorno ad esso dall'attrazione gravitazionale. Il movimento ricorda un po' l'aggancio con una corda invisibile, col pianeta che si fa passare dietro la sonda per rilanciarla in avanti col classico movimento di una fionda. Il caso più semplice, che è anche quello ideale in cui si ha il massimo guadagno di velocità, è quello in cui la velocità $\vec{v}$ della sonda e quella $\vec{V}$ del pianeta sono parallele con verso opposto. Imponiamo la conservazione della quantità di moto del sistema lungo questa direzione, indicando con m ed M le due masse e con v e V le componenti delle velocità:



$$mv + MV = mv' + MV'$$

da questa equazione si vede come la velocità del pianeta resti praticamente immutata, infatti calcolando la differenza fra prima e dopo, tenendo presente che le sonde hanno la massa di una piccola automobile (10^3 kg) mentre i pianeti dell'ordine di 10^{24} kg (Venere) o 10^{27} kg (Giove):

$$V - V' = \frac{m}{M}(v' - v) \simeq \frac{10^3}{10^{24}}(v' - v) = 10^{-21}(v' - v) \simeq 0$$

Risolviamo ora il problema come un urto elastico: la velocità del CM risulta praticamente uguale a quella del pianeta a causa del piccolissimo valore del rapporto $m/M = 10^{-21}$:

$$v_{CM} = \frac{mv + MV}{m + M} = \frac{m}{\cancel{m} + M}v + \frac{M}{\cancel{m} + M}V \simeq V$$

quindi la sonda emerge dal passaggio dietro al pianeta con velocità:

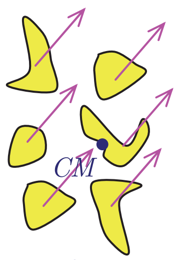
$$v' = 2v_{CM} - v = 2V - v$$

e considerato che in questo semplice caso le velocità sono tutte sulla stessa retta, possiamo riscrivere questa relazione anche in forma vettoriale: $\vec{v}' = 2\vec{V} + \vec{v}$. Il caos generale in cui la velocità del pianeta e quella della sonda non sono allineate è più complesso, tuttavia il risultato qui trovato costituisce il massimo ideale incremento di velocità che è possibile ottenere dall'effetto fionda.

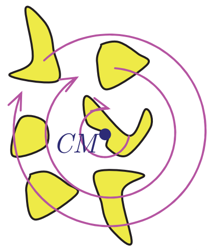
La Controfisica

A titolo di esempio consideriamo il volo fatto nel della sonda Cassini di m=5700Kg, che lasciò la Terra nel 1997 alla velocità di 4km/s alla volta di Saturno. Per raggiungere Saturno tuttavia le occorrevano almeno 10km/s nella giusta direzione, necessari per portarsi così lontano dall'attrazione del Sole. Essa ricevette un incremento di velocità di 7km/s da un primo passaggio attorno al Venere (V=35km/s), un successivo incremento di 5.5km/s ripassando per la Terra (V=30km/s), ed una spinta da Giove (V=13km/s) di 2km/s che lo indirizzò anche sulla traiettoria finale.

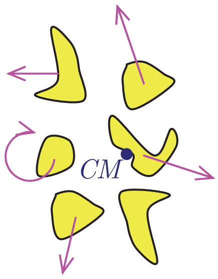
4. Il sistema "concentrato"



traslazione



rotazione attorno al CM



vibrazione rispetto al CM

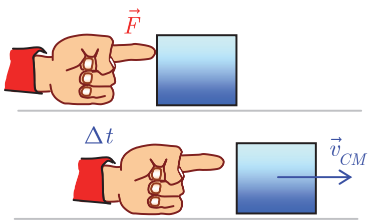
In quanti modi indipendenti un sistema può incamerare energia cinetica?

Il semplice movimento di *traslazione*, che si verifica quando tutte le parti del sistema hanno la stessa velocità in intensità, direzione e verso, non esaurisce i modi in cui l'energia cinetica può essere posseduta da un sistema. Un secondo movimento fondamentale è quello di *rotazione attorno al CM*, che avviene quando le traiettorie seguite dalle parti del sistema sono circonferenze centrate nel CM. Infine il sistema può effettuare delle *vibrazioni rispetto al CM*: in questo caso le distanze delle sue parti dal CM cambiano nel tempo, dando così luogo a delle deformazioni. E' possibile dimostrare che ogni altro movimento, ad esempio una rotazione attorno ad un punto che non sia il CM, può ottenersi sovrapponendo una traslazione, una rotazione attorno al CM, ed eventualmente una vibrazione. Ad ognuno di questi movimenti corrisponde un modo indipendente di incamerare energia cinetica, quindi possiamo scrivere:

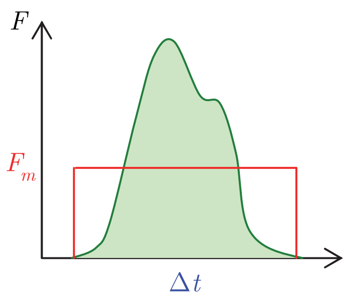
$$K = K_{traslazione} + K_{rotazione} + K_{vibrazione}$$

L'energia cinetica di traslazione di un sistema si ottiene sommando tanti contributi della forma $\frac{1}{2}mv^2$, ma essendo le velocità delle parti tutte uguali, (ed uguali a quella del CM) il risultato sarà $\frac{1}{2}Mv^2$ dove M è la massa complessiva. K_{trasl} coincide quindi con l'energia cinetica che avrebbe il sistema se tutta la sua massa fosse concentrata nel suo CM.

Quali informazioni energetiche abbiamo su questi movimenti indipendenti ?



Esiste un modo differente di scrivere la seconda legge della dinamica $\vec{F} = m\vec{a}_{CM}$ che permette di conoscere la variazione della sola *energia cinetica di traslazione* K_{trasl}. Supponiamo di avere un sistema sul quale agisca, dall'esterno, un complesso di forze la cui risultante sia $\vec{F}$. Consideriamo un blocchetto di ghiaccio, fermo su di un piano senza attrito, che riceve una spinta per un tempo Δt. Al termine della spinta il blocco si trova in uno stato di moto traslatorio. Riportiamo su di un grafico l'intensità di $\vec{F}$ in funzione del tempo: non si tratta in generale di un valore costante. L'area sottesa da questo grafico, evidenziata in verde nella figura, si dice *impulso* della forza in quella direzione. Consideriamo ora un rettangolo di base proprio Δt che abbia un'estensione equivalente all'area sottesa dal grafico dell'intensità della forza. L' altezza di questo rettangolo viene detto *forza media* F_m esercitata in quella direzione. Un caso particolare si ha quando la forza risultante è costante e coincide col suo valore medio: $F_m = F$. La forza media gode di un' importante proprietà, che va sotto il nome di:



> **Teorema dell'impulso**:
> quando un oggetto viene sottoposto ad una forza la cui intensità cambia nel tempo, la variazione di velocità del centro di massa Δv_{CM} in quella direzione è la stessa che si avrebbe se il corpo fosse sottoposto, per lo stesso intervallo temporale Δt, ad una forza costante pari alla forza media.

Questo risultato, che non dimostriamo, permette di riscrivere la seconda legge della dinamica $\vec{F} = m\vec{a}_{CM}$ in modo differente. Immaginiamo di concentrare l'intera massa del sistema in un solo punto, il suo CM. Su di esso facciamo agire la forza media F_m, la cui intensità è per definizione costante nel tempo. Quando su di un punto agisce una forza costante, anche la sua accelerazione è costante, e quindi uguale all'accelerazione media:

$$a_{CM} = \frac{v_{finale} - v_{iniziale}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_{CM}}{\Delta t}$$

e quindi:

$$F_m = m\frac{\Delta v_{CM}}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad F_m \Delta t = m\Delta v_{CM}$$

Inoltre, poiché l'accelerazione è costante, vale anche il *teorema della velocità media*, per cui il valore medio della velocità si ottiene come media dei suoi valori iniziale e finale: $v_m = \frac{1}{2}\left(v_{fin} + v_{in}\right)$. Ma la velocità media è legata alla distanza d_{CM} percorsa dal sistema-particella durante il tempo Δt dalla relazione $v_m = d_{CM}/\Delta t$. Si ottiene:

$$\Delta t = \frac{d_{CM}}{v_m} = \frac{d_{CM}}{\frac{1}{2}\left(v_{fin} + v_{in}\right)}$$

e sostituendo nella relazione $F_m \Delta t = m\Delta v_{CM}$ che esprime il teorema dell'impulso:

$$F_m \frac{d_{CM}}{\frac{1}{2}\left(v_{fin} + v_{in}\right)} = m\left(v_{fin} - v_{in}\right)$$

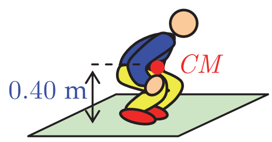
da cui:

$$F_m d_{CM} = \tfrac{1}{2}mv_{fin}^2 - \tfrac{1}{2}mv_{in}^2 = \Delta K_{CM}$$

La Controfisica
La quantità $F_m d_{CM}$ non è il lavoro di F_m perché la forza non viene moltiplicata per lo spostamento del suo punto di applicazione ma per lo spostamento del centro di massa del sistema.

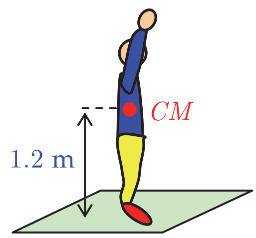
Se quindi concentriamo tutta la massa del sistema nel suo CM, la variazione dell'energia cinetica del nuovo sistema-particella si calcola moltiplicando il valore medio F_m di questa forza per lo spostamento d_{CM} del centro di massa nella direzione della forza stessa. Ma come abbiamo visto, l'energia cinetica del sistema concentrato nel CM coincide con quella che abbiamo chiamato *energia cinetica di traslazione*. Il teorema dell'impulso permette quindi il calcolo della variazione nell'energia cinetica di traslazione di un sistema. Il ragionamento si può ripetere per ciascuna delle componenti della forza nelle tre direzioni dello spazio e quindi vale per ciascuna delle componenti della forza. In questo caso nel membro di destra avremo la variazione di energia cinetica dovuta a quella componente, ad esempio:

$$F_x x = \tfrac{1}{2}mv_{x-finale}^2 - \tfrac{1}{2}mv_{x-iniziale}^2 .$$



Come si applica il teorema dell'impulso in presenza di forze vincolari?

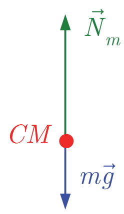
Consideriamo, a titolo di esempio, una persona di massa $m = 80$ kg che si pieghi sulle ginocchia per eseguire un salto in verticale. Durante la fase di contatto con il terreno il suo CM passa da una quota di 0.40 m fino ad un'altezza di 1.2 m, e quando si stacca da terra ha una velocità di 3.0 m/s. Possiamo stimare il valore medio $\bar{N}$ della forza variabile esercitata su di lei dal pavimento applicando il teorema dell'impulso:



$$\left(N_m - mg\right)d_{CM} = \tfrac{1}{2}mv^2$$

da cui, essendo $d_{CM} = (1.2 - 0.40)\ \text{m} = 0.80\ \text{m}$, abbiamo:

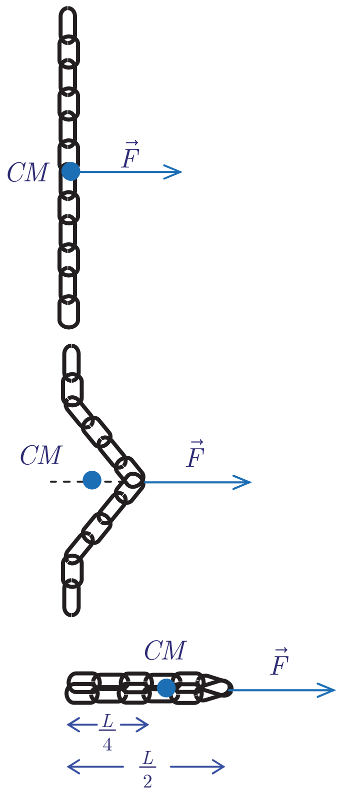
$$N_m = mg + \frac{\frac{1}{2}mv^2}{d_{CM}} = 1235\ \text{N}$$



che supera di molto il semplice peso $mg = 785$ N della persona. Va notato che la forza normale che il pavimento esercita mantiene fisso il proprio punto di applicazione e quindi non compie alcun lavoro sull'uomo, cioè non trasferisce energia al sistema. Infatti l'energia cinetica che l'uomo possiede grazie alla velocità con la quale si stacca da terra, non proviene certo dal pavimento. La sorgente energetica è l'energia potenziale chimica incamerata tramite gli alimenti, che risulta diminuita. Il teorema della conservazione dell'energia si scrive:

$$\Delta K + \Delta U_{chim} + \Delta U_{grav} + \Delta E_{int} = L_{est} = 0$$

dove ΔK contiene, oltre alla variazione di energia cinetica del CM già calcolata, i contributi di rotazione e vibrazione attorno ad esso, dovuti ad esempio ai movimenti delle braccia o delle altre parti del corpo che accompagnano il salto. Il termine ΔE_{int} esprime invece la variazione di temperatura dovuta all'attrito fra le parti del corpo.



Esercizi

77. Una catena di lunghezza L , stesa lungo un piano privo di attrito, viene trascinata per il suo punto medio da una forza orizzontale costante $\vec{F}$. Si calcolino: l'energia cinetica della catena nel momento in cui le due metà si scontrano e l'incremento di energia interna che gli urti fra gli anelli hanno determinato.

Scegliamo come sistema la catena: la forza $\vec{F}$ è un agente esterno. Prima del contatto fra le due metà, la simmetria del problema richiede che la catena assuma la stessa forma nelle due regioni in cui la retta di azione di $\vec{F}$ divide il piano. Ne segue che il CM, inizialmente nel punto medio della catena, si sposta lungo tale asse di simmetria per il sistema. Possiamo calcolare la variazione che $\vec{F}$ produce nell'energia cinetica di traslazione riferendoci al sistema-particella concentrato nel CM:

$\frac{1}{2} m v_{CM}^2 = F d_{CM} = F \frac{L}{4}$

infatti la posizione finale del CM è metà della catena ripiegata, quindi si è mosso di un tratto $d_{CM} = L/4$. Sapendo poi che il punto di applicazione di $\vec{F}$ si è spostato invece di $L/2$, scriviamo la conservazione dell'energia per il processo:

$\Delta K + \Delta E_{int} = L_{est} = F \frac{L}{2}$

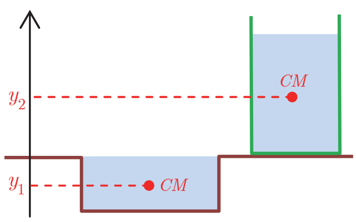
Con la scelta fatta degli istanti iniziale e finale, i movimenti interni delle due metà della catena non interessano, visto che quando la catena si trova ripiegata abbiamo un oggetto che, inizialmente fermo sta semplicemente traslando, per cui $\Delta K = K_{fin} - 0 = (1/2) m v_{CM}^2$. Sostituendo:

$\frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \Delta E_{int} = F \frac{L}{2} \quad \Rightarrow \quad F \frac{L}{4} + \Delta E_{int} = F \frac{L}{2}$

che risolta fornisce $\Delta E_{int} = FL/4$.

Come si applica il teorema se la forza che agisce è conservativa?

In questo caso già conosciamo la variazione dell'energia cinetica di traslazione dovuta a questa forza. Infatti nel sistema-particella si ha $\Delta E_{int} = 0$ e tutta l'energia cinetica è di traslazione, per cui quando agisce solo una forza conservativa si ha $\Delta K_{trasl} = L_e = -\Delta U$. Se ci sono due forze, una conservativa e l'altra non conservativa avremo $\Delta K_{trals} = F d_{CM} + L_c = F d_{CM} - \Delta U$.



Esercizi

78. Una piscina interrata avente forma di parallelepipedo a base rettangolare $4.0 \text{ m} \times 8.0 \text{ m}$ e profonda 2.5 m deve essere svuotata e l'acqua posta in un serbatoio cilindrico poggiato a terra avente raggio di base 3.0 m . Si calcoli il lavoro che deve essere fatto dalla pompa sapendo che la densità dell'acqua è $\rho_a = 1000 \text{ kg/m}^3$.

La massa di acqua da spostare vale:

$m = \rho_a V = 1000 \times (4.0 \times 8.0 \times 2.5) \text{ kg} = 8.0 \times 10^4 \text{ kg}$

Fissando un asse delle ordinate con lo zero al livello del suolo, il baricentro dell'acqua viene spostato dalla quota $y_1 < 0$ che si trova a metà della profondità della piscina $y_1 = -(2.5/2) \text{ m}$, alla quota $y_2 > 0$ che si trova a metà dell'altezza del pelo libero del serbatoio. Per trovare la quota del pelo libero dividiamo il volume dell'acqua per la superficie di base, e poi calcoliamo la sua metà per avere la quota del baricentro y_2 :

$$y_2 = \frac{1}{2}\frac{V}{\pi R^2} = \frac{4.0\times 8.0\ \times 2.5}{2\times 3.14\times 3.0^2}\ \text{m} = 1.4\ \text{m}$$

Quindi il CM dell'acqua si è spostato di:

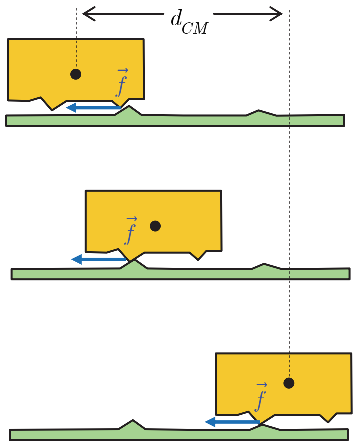
$$d_{CM} = y_2 - y_1 = [1.4-(-2.5\ /\ 2)]\ \text{m} = 2.7\ \text{m}$$

Poiché l'energia cinetica è sempre nulla, il lavoro fatto dalla pompa è uguale e contrario a quello fatto dalla gravita:

$$\Delta K = 0 = -mgd_{CM} + L_{pompa}$$

$$L_{pompa} = mgd_{CM} = (8.0\times 10^4 \times 9.81\times 2.7)\,\text{J} = 2.1\times 10^6\ \text{J}$$

5. Attrito ed energia cinetica di traslazione



Come si può calcolare il lavoro dell'attrito radente dinamico?

Non è possibile calcolare per via diretta il lavoro svolto dalla forza di attrito dinamico, in quanto lo spostamento del punto di applicazione di questa forza è imprevedibile. Lo slittamento di due superfici è ostacolato dal fatto che queste si agganciano nelle microscopiche asperità, sempre presenti anche nello strato apparentemente più liscio. In questo modo il punto di contatto si sposta continuamente e non è possibile seguire i dettagli della traiettoria che percorre. Quello che possiamo misurare è lo spostamento d_{CM} del CM dell'oggetto, ma tale grandezza non consente il calcolo del lavoro svolto dall'attrito sul corpo, perché non esiste una relazione semplice che la leghi alla lunghezza del tragitto effettivamente percorso dal punto di applicazione della forza. Tuttavia, applicando il teorema dell'impulso alla forza di attrito dinamico, possiamo calcolare la variazione dell'energia cinetica di traslazione quando il CM slitta per un tratto d_{CM}. Consideriamo un blocco in moto con velocità v, che viene ad attraversare una regione dove sperimenta un attrito dinamico f, che, come sappiamo, è costante ed indipendente dalla velocità. Immaginando di concentrare il blocco nel suo centro di massa, il teorema dell'impulso dice che:

$$\Delta K_{trasl} = -fd_{CM}$$

In questo caso, infatti, visto che la direzione dello spostamento e quella della forza coincidono ma il verso è opposto, si ha $f_{\parallel}\Delta s = -fd_{CM}$, così che la quantità d_{CM} coincide con la distanza lungo la quale il corpo ha effettivamente strisciato. Studiamo ora il sistema reale, composto dal blocco e dal piano dove slitta, servendoci di questa informazione sull'energia cinetica di traslazione. Dato che l'unico movimento di cui il sistema reale è capace è la traslazione del blocco, conoscendo ΔK_{trasl} abbiamo già calcolato tutta la variazione di energia meccanica che gli compete. Accanto ad essa dovremo considerare il cambiamento energetico interno, che si manifesta attraverso l'innalzamento della temperatura del blocco e del suolo durante lo scivolamento. Non ci sono forze esterne, essendo l'attrito un'azione tra le due parti del sistema. Scriviamo quindi la legge di conservazione dell'energia:

$$\Delta K_{trasl} + \Delta E_{int} = L_{est} = 0$$

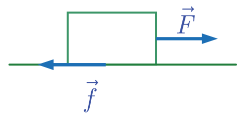
sostituiamo il cambiamento di energia cinetica dovuto all'attrito:

$$-fd_{CM} + \Delta E_{int} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta E_{int} = fd_{CM}$$

si trova così che mentre l'energia cinetica del sistema è diminuita di fd_{CM}, della stessa quantità è cresciuta la sue energia interna. Con questo modo di procedere, il problema del calcolo del lavoro dell'attrito dinamico è stato evitato: in un certo senso lo abbiamo nasco-

La Controfisica

Per convincersi che $-fd_{CM}$ non è il lavoro dell'attrito consideriamo un blocco che si muova a velocità costante tirato da una forza F, lungo un piano dove l'attrito vale f.

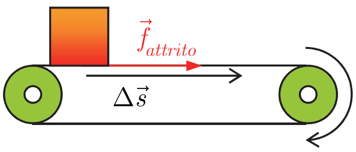


Dato che l'accelerazione è nulla, deve essere $f = -F$ e se utilizziamo d_{CM} come spostamento per entrambe si ha:

$$L_e = -fd_{CM} + Fd_{CM} = 0$$

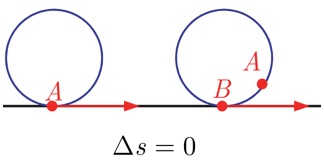
Ma è impossibile che il lavoro esterno sia zero dato che l'energia interna del blocco è certamente aumentata al termine del processo, come si sperimenta misurando la sua temperatura. Ne segue che il lavoro di F deve essere maggiore di quello di f, e l'unica possibilità che ciò avvenga è che lo spostamento del punto di applicazione di f sia minore di d_{CM}

sto sotto al tappeto attraverso la scelta di un sistema rispetto al quale $\vec{f}$ è una forza interna. Le informazioni in nostro possesso ci consentono quindi di calcolare ΔK_{trasl} del blocco, la variazione dell'energia interna del sistema che comprende anche il piano, ma *non* permettono di conoscere ΔE_{int} del solo blocco.



In quali casi l'attrito radente statico compie lavoro?

L'attrito statico può compiere lavoro su di un sistema quando si sposta il punto di contatto dove esso si esercita. Immaginiamo un nastro trasportatore che muove una cassa ferma, oppure una mano che solleva un sacchetto stringendone l'apertura. Anche se la sorgente è chiaramente l'energia potenziale chimica della persona che solleva o del motore del nastro, l'attrito fa da tramite e compie lavoro. L'energia trasferita alla cassa oppure al sacchetto può calcolarsi tramite il lavoro dell'attrito statico.

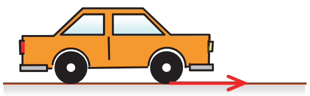


In quali casi l'attrito statico non compie lavoro?

Le situazioni sopra descritte non vanno confuse con i casi in cui il punto di contatto cambia da un istante all'altro, ma la sua velocità rimane sempre zero. L'attrito statico permette alle persone di camminare ed alle ruote di rotolare, ma non compie lavoro su questi sistemi. In effetti non si tratta di una stessa forza che sposta il proprio punto di applicazione ma di una forza differente istante per istante, perché applicata in punti diversi del corpo. L'attrito non è la sorgente di energia a cui attingono i corpi, ma fa solo da tramite affinché l'energia potenziale del sistema, come quella chimica degli alimenti o del carburante, possa trasformarsi in energia cinetica. Il teorema dell'impulso consente il calcolo della variazione nell'energia cinetica di traslazione che la mediazione dell'attrito statico permette.

Esercizi

79. Calcolare la minima distanza che occorre ad un'automobile, partendo da ferma, per raggiungere la velocità $|\vec{v}| = 100\,\mathrm{km/h}$ se il coefficiente di attrito statico fra pneumatici ed asfalto vale $\mu_s = 0.563$. Calcolare quindi il tempo necessario per raggiungere tale velocità.



Scegliamo come sistema la stessa automobile. Le forze esterne si bilanciano lungo la direzione verticale, mentre l'attrito statico, che agisce in orizzontale, non compie alcun lavoro. Infatti il suo punto di applicazione cambia continuamente da un istante all'altro, e per il breve intervallo temporale in cui quella parte di gomma è a contatto col terreno, il punto di applicazione si sposta solo nel caso in cui vi sia slittamento. Ma questo è da escludere visto che viene richiesta la distanza minima necessaria. In effetti l'attrito fa da tramite ma non è certo la sorgente da cui attinge l'auto per acquistare energia, ed è quindi è corretto che non compia lavoro motore, cioè non trasferisca energia al sistema. La conservazione dell'energia si scrive:

$$\Delta K + \Delta U_{chim} + \Delta E_{int} = 0$$

dove l'energia potenziale chimica è quella che viene rilasciata durante la combustione del carburante, una parte della quale andrà a riscaldare le parti meccaniche sollecitate provocando l'incremento di E_{int}. Non possiamo risolvere questa equazione dato che i due termini ΔU_{chim} e ΔE_{int} sono ignoti. Applicando il teorema dell'impulso si ha la variazione dell'energia cinetica del sistema concentrato nel CM:

$$\Delta K_{CM} = \tfrac{1}{2}mv^2 - 0 = F_{ext}d_{CM} = \mu_s mgd_{CM}$$

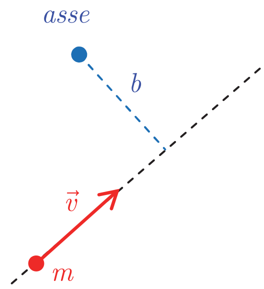
dove ammettiamo che la forza di attrito statico, sempre compresa fra 0 e $\mu_s mg$, assuma il suo valore massimo in modo da ottenere lo spostamento minimo. Risolvendo otteniamo lo spostamento del CM necessario per arrivare alla velocità v, che coincide con lo spostamento di qualunque altro punto, essendo la macchina un corpo rigido che trasla:

$$d_{CM} = \frac{v^2}{\mu_s g} = \left(\frac{27.8}{0.563 \times 9.81}\right)\mathrm{m} = 140\,\mathrm{m}$$

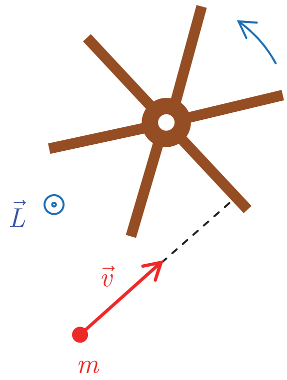
la stessa distanza è, per simmetria, la minima necessaria per arrestare un veicolo che proceda a $100\,\text{km/h}$. Per il calcolo del tempo necessario Δt, essendo costante la forza applicata, vale il teorema della velocità media, per cui:

$$v_m \Delta t = d_{CM} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{d_{CM}}{v_m} = \frac{d_{CM}}{(v+0)/2} = \frac{140}{27.8/2}\ \text{s}\ = 10.1\,\text{s}$$

6. Il momento angolare



Per descrivere la dinamica della rotazione di un oggetto in modo più efficace di quanto non consentirebbero le tre leggi della dinamica , torna molto utile introdurre una nuova grandezza vettoriale $\vec{L}$, detta *momento angolare rispetto ad un asse*[3] , e che nei moti rotatori riveste un ruolo analogo a quello svolto dalla quantità di moto nelle traslazioni. Potremmo pensare al momento angolare come ad una misura della "quantità di rotazione" che il corpo possiede attorno ad un certo asse.

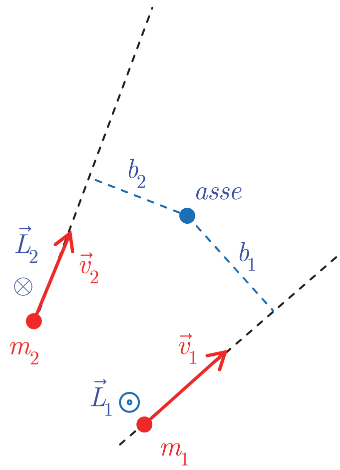


Come viene definita l'intensità di $\vec{L}$ rispetto ad un asse?

Ci limiteremo a considerare il caso semplice di un punto di massa m la cui velocità ad un dato istante sia $\vec{v}$, ed il cui moto si svolga tutto su di uno stesso piano. L'intensità del momento angolare $\vec{L}$ di quel punto rispetto ad un *asse fisso* a nostra scelta perpendicolare al piano, è definita come il prodotto dell'intensità $m\,|\vec{v}|$ della sua quantità di moto per la *distanza* b che ha, dall'asse, la retta contenente la velocità $\vec{v}$ che anima m in quell'istante:

$$|\vec{L}| = m\ |\vec{v}|\ b$$

In figura abbiamo rappresentato b per un moto sul piano del foglio ed un asse che buca tale piano. La definizione potrebbe sembrare in qualche modo abusiva perché in effetti non esiste alcun moto rotatorio del punto m, né attorno all'asse scelto né attorno ad alcun altro. Tuttavia la massa in questione *possiede la capacità di generare un moto rotatorio* : possiamo convincerci di questo immaginando un mulinello a pale imperniato sull'asse stesso. Il mulinello si metterebbe immediatamente in rotazione se la pallina animata di quantità di moto $\vec{p}$ lo colpisse. Osserviamo che la nostra definizione prevede che il momento angolare abbia intensità nulla nel caso in cui la massa sia diretta contro l'asse ($b = 0$), coerentemente con il fatto che in tale situazione non sarebbe in grado di mettere in rotazione il mulinello. Inoltre, proprio perché più grande è la distanza minima b (a parità degli altri fattori) maggiore la velocità angolare che guadagnerebbe il mulinello nell'impatto, si è scelto di far dipendere l'intensità del momento angolare da d. Analogamente si giustifica la presenza di m e $|\vec{v}|$ nell'intensità di $\vec{L}$. Come si ricava dalla sua definizione, le unità di misura del momento angolare sono $\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$.



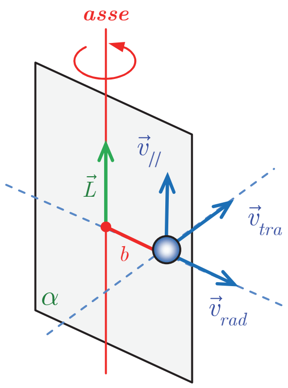
Come vengono definiti direzione e verso di $\vec{L}$ in questo caso semplice?

Volendo che $\vec{L}$ esprima la capacità di far ruotare attorno ad un asse, che un oggetto in moto potenzialmente possiede, la direzione che si sceglie per tale vettore è quella dell'asse. Nelle figure a margine si tratta quindi di una retta perpendicolare al piano della pagina. Il verso che assegniamo è invece tale per cui *un osservatore con la testa nella punta*

[3] Chiamato anche *momento della quantità di moto.*

di $\vec{L}$ vedrebbe avvenire in senso antiorario la rotazione del nostro immaginario mulinello imperniato sull'asse. E' possibile visualizzare immediatamente il verso di $\vec{L}$ allineando le dita della mano destra lungo la quantità di moto e tenendo il palmo rivolto all'asse: il momento angolare è allora diretto come il pollice. Per visualizzare un vettore perpendicolare al foglio useremo il simbolo $\odot$ quando il vettore è uscente, cioè con la testa diretta verso chi legge, ed il simbolo $\otimes$ quando il verso è entrante nel foglio. In figura sono dati due esempi di momento angolare entrante ed uscente dal foglio. E' possibile dimostrare che questi risultati si estendono anche ad oggetti non puntiformi, purché siano in moto di pura traslazione: in questi casi il momento angolare si calcola immaginando l'intera massa concentrata nel CM del corpo.

Come si definisce $\vec{L}$ rispetto ad un asse, nel caso generale in tre dimensioni?

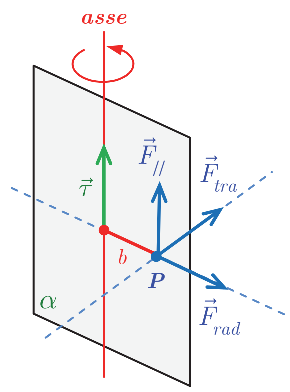


In tre dimensioni, quando si ha una particella di massa m in moto e si sceglie un asse fisso, esiste in ogni istante un *piano* α che contiene m e l'asse attorno a cui vogliamo definire $\vec{L}$. Il momento angolare misura la capacità di far ruotare questo piano posseduta dalla massa in movimento: possiamo immaginarlo come una porta girevole che venga colpita da un proiettile. Qualunque sia la direzione della velocità $\vec{v}$ con cui si muove m, $\vec{v}$ può essere scomposta in un vettore $\vec{v}_{//}$ parallelo all'asse , un vettore $\vec{v}_{rad}$ di allontanamento radiale dall'asse, ed un vettore $\vec{v}_{tra}$ di velocità trasversa, perpendicolare al piano α. Soltanto $\vec{v}_{tra}$ ha la capacità di far ruotare il piano α, capacità tanto maggiore quanto più grande è la distanza b dall'asse della retta che contiene $\vec{v}_{tra}$. Pertanto definiamo modulo del momento angolare il valore:

$$|\vec{L}| = m\ |\vec{v}_{tra}|\ b$$

La direzione di $\vec{L}$ è parallela all'asse scelto ed il verso che gli assegniamo è invece tale per cui un osservatore con la testa nella punta di $\vec{L}$ vedrebbe avvenire in senso antiorario la rotazione del *piano* α. La definizione data sul piano non è che un caso particolare di questa più generale.

Come si definisce il momento torcente rispetto ad un asse, in tre dimensioni?



Nei riferimenti inerziali , la seconda legge della dinamica ha un'importante conseguenza che qui ci limitiamo ad enunciare senza dimostrazione: il cambiamento nel tempo del momento angolare di un punto, cioè $\Delta\vec{L}/\Delta t$, *è causato* dal momento torcente della risultante delle forze che agiscono su quel punto. Come sappiamo, il momento torcente di una forza rispetto ad un asse misura la capacità che essa ha di produrre rotazione attorno a quell'asse. In due dimensioni la sua intensità l'abbiamo definita moltiplicando l'intensità della forza per il braccio b, distanza della retta di azione della forza dal punto in cui l'asse buca il piano del moto. In maniera simile, nelle tre dimensioni, consideriamo il punto P dove è applicata la risultante delle forze. Esiste in ogni istante un *piano* α che contiene P e l'asse attorno a cui vogliamo definire il vettore momento torcente $\vec{\tau}$. Tale capacità è chiaramente nulla quando la forza appartiene al piano α. Qualunque sia la direzione della forza risultante $\vec{F}$ applicata a P, essa può essere scomposta in un vettore $\vec{F}_{//}$ parallelo all'asse , un vettore $\vec{F}_{rad}$ di allontanamento radiale dall'asse, ed un vettore $\vec{F}_{tra}$ trasverso, perpendicolare al piano α. Soltanto $\vec{F}_{tra}$ ha la capacità di far ruotare il piano α, capacità tanto maggiore quanto più grande è la distanza b dall'asse della retta che contiene $\vec{F}_{tra}$. Pertanto definiamo modulo del momento torcente il valore:

$$|\vec{\tau}| = |\vec{F}_{tra}|\ b$$

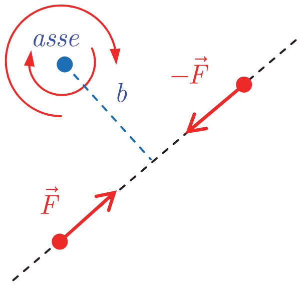
La direzione di $\vec{\tau}$ è parallela all'asse scelto ed il verso che gli assegniamo è invece tale per cui un osservatore con la testa nella punta di $\vec{\tau}$ vedrebbe avvenire in senso antiorario la rotazione del *piano* α.

Che relazione esiste fra momento angolare e momento della forza risultante?
Si può dimostrare che vale il seguente:

Teorema del momento angolare assiale
La rapidità con la quale varia il momento angolare di un punto materiale *rispetto a un asse fisso* è data dal vettore $\vec{\tau}$ momento della risultante delle forze agenti su tale punto:

$$\vec{\tau} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}$$

Un'importante applicazione di tale teorema, riguarda il caso in cui si ha un sistema sul quale non agiscono momenti torcenti esterni a cambiare il valore di $\vec{L}$. E' la situazione che si presenta, ad esempio, durante un tuffo: in quegli istanti il nuotatore è sottoposto alla sola gravità, che non è in grado di produrre rotazioni attorno ad un asse passante per il suo CM perché è una forza con distanza nulla da tale asse. Analogamente è nullo il momento delle forze esterne su di una pattinatrice quando, saltando, richiama le braccia a sé per aumentare la velocità di esecuzione della piroetta. E' facile convincersi che le forze interne non possono mai cambiare $\vec{L}$, in quanto la terza legge prevede che per ognuna di esse ve ne sia una uguale ed opposta sulla stessa retta a produrre momento torcente contrario, e quindi non hanno capacità di generare rotazioni. Pertanto un elicottero che non avesse la piccola elica posteriore a trattenerlo, si metterebbe lentamente in rotazione opposta a quella delle pale, che in quanto azionate da forze interne, non possono cambiare il momento angolare complessivo del velivolo. E' per tale ragione che le due eliche degli elicotteri militari girano in senso orario una, e antiorario l'altra. In tutte queste situazioni in cui $\vec{\tau} = \vec{0}$, il teorema del momento angolare assiale prevede che il valore di $\vec{L}$ del sistema rimanga costante nel tempo, o come si dice, *si conservi*.

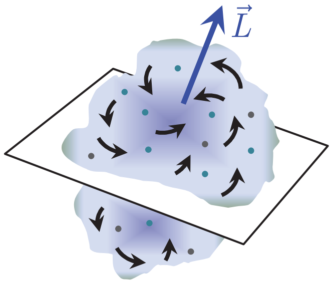


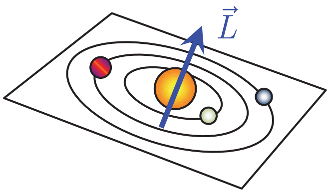
Principio di conservazione del momento angolare
In un sistema di corpi in cui è nullo il momento delle forze dall'esterno rispetto a un asse, si conserva il momento angolare rispetto a quell'asse:

$$\Delta \vec{L} = \vec{0}$$

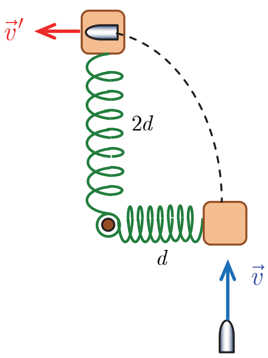
L'esperienza mostra che questo risultato è un principio universale in fisica, anch'esso come la conservazione della quantità di moto valido non solo in meccanica classica, dove è dimostrabile a partire dalle leggi della dinamica, ma anche in meccanica relativistica ed in meccanica quantistica. Il principio di conservazione del momento angolare ha importanti conseguenze sulle relazioni fra le velocità dei corpi, le quali varieranno sempre in modo da mantenere costante il valore di $\vec{L}$ complessivamente posseduto dal sistema. Nelle applicazioni a volte conviene scomporre la velocità in radiale, normale e trasversa.

Perché tutti i pianeti del sistema solare orbitano più o meno sullo stesso piano?
Il sistema solare si è formato quattro miliardi e mezzo di anni fa da una nebulosa di gas e polvere interstellare che si è contratta sotto l'azione della sua stessa gravità. Anche se inizialmente la nube era distribuita nelle tre dimensioni dello spazio, il sistema solare è composto di pianeti con orbite che appartengono tutte approssimativamente ad uno stesso piano. Ci si sarebbe potuti attendere un risultato differente, ad esempio con l'orbita di Marte posta a 90° rispetto a quella terrestre? In realtà nell'Universo vi sono numerose strutture composte di molti corpi tutti orbitanti su di un unico piano: per esempio le galassie a spirale come la nostra o i sistemi plane-



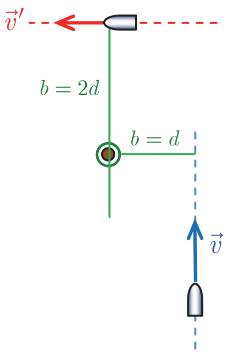


tari extrasolari scoperti negli ultimi anni. Anche la materia che cade entro un buco nero si dispone lungo un disco piatto, detto disco di accrescimento. Il motivo è che le nubi di gas e polvere da cui nascono le strutture, in origine, hanno spesso un momento angolare complessivo non nullo, che quindi individua sia una precisa direzione, sia un piano ad essa perpendicolare. Osservando una nube di gas e polveri interstellari, la rotazione complessiva può non apparire evidente, perché i corpuscoli che la compongono sono in moto su piani differenti, molti dei quali si intersecano, ed inoltre alla rotazione si sovrappongono altri moti caotici. Col tempo però, gli urti fra le particelle cancellano questi moti caotici, trasformando in energia interna la loro energia cinetica. Tuttavia la rotazione d'insieme non può mai venir cancellata dalle collisioni casuali, perché il sistema di gas e polveri che si contrae è isolato, e quindi il suo momento angolare complessivo deve rimanere costante. La nube che si contrae, va quindi anche progressivamente sgonfiandosi, finché non si appiattisce del tutto su un piano perpendicolare al momento angolare originario $\vec{L}$. In questo modo perde tutti i moti casuali che le particelle possiedono in direzione perpendicolare a questo piano, ma mantiene il valore di $\vec{L}$.



Esercizi

80. Su di un piano orizzontale senza attrito una molla di costante $k = 100$ N/m ha un estremo agganciato ad un perno verticale, libera di ruotare attorno ad esso. All'altro estremo c'è un blocchetto di sughero di massa trascurabile, e la molla si trova alla lunghezza di riposo $d = 13.0$ cm. Un proiettile di massa $m = 0.500$ kg che viaggia ad una velocità $\vec{v}$ di modulo 8.00 m/s in direzione perpendicolare alla molla, si conficca nel sughero ed il sistema inizia a ruotare attorno al perno. Si osserva che dopo una rotazione di un angolo retto la lunghezza della molla è raddoppiata. Calcolare la velocità $\vec{v}'$ del proiettile in quell'istante e quanta energia è andata dissipata nell'impatto.



Il sistema formato dalla molla e dal proiettile conserva il suo momento angolare attorno all'asse del perno perché le forze nell'urto sono tutte interne :

$|\vec{L}| = m\,|\vec{v}|\,d = m\,|\vec{v}'|\,(2d) \;\Rightarrow\; |\vec{v}'| = \frac{1}{2}\,|\vec{v}| = 4.00$ m/s

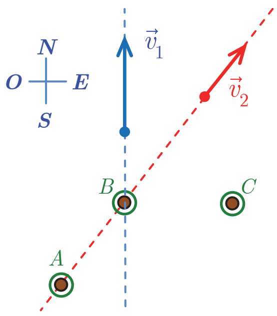
L'energia meccanica diminuisce a causa dell'urto, che è completamente anelastico. Calcoliamo il cambiamento dell'energia cinetica e di quella potenziale dopo la rotazione:

$$\Delta K = K' - K = \tfrac{1}{2}m\,|\vec{v}'|^2 - \tfrac{1}{2}m\,|\vec{v}|^2 = \tfrac{1}{2}m\cdot\tfrac{1}{4}\,|\vec{v}|^2 - \tfrac{1}{2}m\,|\vec{v}|^2 = -\tfrac{3}{8}m\,|\vec{v}|^2$$

$$\Delta U = U' - U = \tfrac{1}{2}k(2d-d)^2 - 0 = \tfrac{1}{2}kd^2$$

$$\Delta K + \Delta U = -\tfrac{3}{8}m\,|\vec{v}|^2 + \tfrac{1}{2}kd^2 = (-\tfrac{3}{8}\times 0.500\times 8.00^2 + \tfrac{1}{2}\times 100\times 0.130)\,\mathrm{J} = -5.50\,\mathrm{J}$$

Quindi nell'impatto del proiettile 5.50 J di energia meccanica sono passati al livello del moto di agitazione delle molecole.

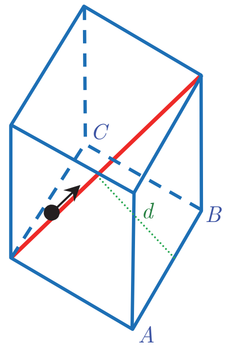


81. Due uccelli di massa $m_1 = 6.50$ kg ed $m_2 = 4.00$ kg volano mantenendo costanti le loro quote. Il primo va verso NORD ad una velocità di 9.00 m/s ed il secondo verso NORD-EST a 7.00 m/s. Calcolare il momento angolare totale di questo sistema rispetto ai pali della luce A, B e C in figura, distanti 3.00 m l'uno dall'altro, prendendo come positivo il verso che va alla pagina al lettore.

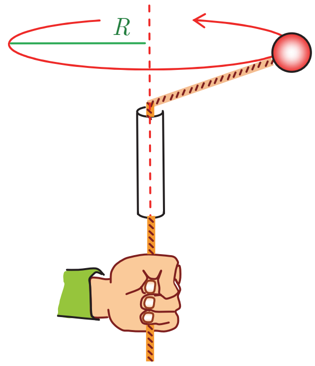
[R: 124 kg·m²/s, 0 kg·m²/s, −99.1 kg·m²/s]

82. In un piano cartesiano si ha una particella di massa $m = 2.60$ kg che viaggia di moto rettilineo uniforme passando per l'origine con velocità $\vec{v}(2.00\text{ m/s};\ 3.00\text{ m/s})$.

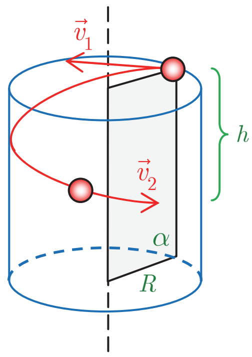
Calcolare il suo momento angolare rispetto al punto $P(1.00;1.00)$, prendendo come positivo il verso che va dalla pagina al lettore. [R: $3.43\ \mathrm{kg\cdot m^2/s}$]



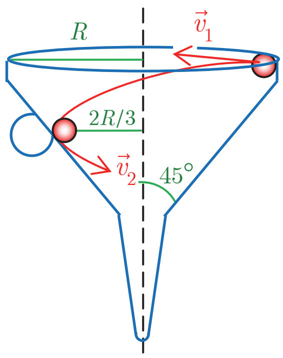
83. Una scultura moderna è formata da uno scheletro di fil di ferro a forma di cubo di spigolo $s = 4.00\ \mathrm{m}$. Una formica di massa $m = 5.00\times10^{-2}\ \mathrm{g}$ si arrampica sulla diagonale del cubo con velocità costante $3.00\ \mathrm{cm/s}$. Calcolare il suo momento angolare rispetto alla direzioni degli spigoli AB e CD che non hanno vertici in comune con la diagonale. [R: $\pm9.95\times10^{-6}\ \mathrm{kg\cdot m^2/s}$]



84. Una pallina di massa $m = 400\ \mathrm{g}$ è al capo di una corda che ruota con velocità $5.00\ \mathrm{m/s}$ su di un piano orizzontale, mentre una mano regge il capo pendente come in figura. Se la mano tira la corda fino a ridurre ad un terzo il raggio R originale della circonferenza, si dica se si conserva il momento angolare rispetto ad un asse passante per il tratto verticale di corda. Si calcoli la nuova velocità di rotazione ed il lavoro svolto dall'esterno sulla pallina. [R: $15.0\ \mathrm{m/s}; 40.0\ \mathrm{J}$]



85. Una biglia viene lanciata orizzontalmente con velocità $|\vec{v}_1| = 1.80\ \mathrm{m/s}$ lungo il bordo di un bicchiere cilindrico privo d'attrito, di raggio R ed essa scivola a spirale lungo la parete. Considerato il piano α che ruota con la biglia e contiene l'asse del bicchiere, calcolare i moduli delle velocità radiale, parallela e trasversa quando la biglia è scesa di un tratto verticale $h = 4.00\ \mathrm{cm}$. [R $0.00\ \mathrm{m/s}; 2.54\ \mathrm{m/s}; 1.80\ \mathrm{m/s}$]



86. Una biglia è lanciata orizzontalmente con velocità $|\vec{v}_1| = 12.0\ \mathrm{cm/s}$ lungo il bordo di un imbuto di raggio $R = 25.0\ \mathrm{cm}$ le cui pareti senza attrito sono inclinate di $45.0°$. Si spieghi se si conserva il momento angolare rispetto all'asse centrale dell'imbuto. Considerato il piano α che ruota con la biglia e contiene l'asse, calcolare i moduli delle velocità radiale, parallela e trasversa quando la biglia è scesa di un tratto verticale tale che il raggio dell'imbuto è $\frac{2}{3}R$. [R: $90.1\ \mathrm{cm/s}; 90.1\ \mathrm{cm/s}; 18.0\ \mathrm{cm/s}$]

Come si può esprimere il momento angolare di un oggetto rigido esteso?

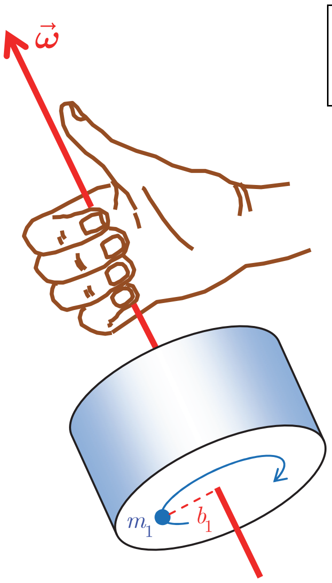
Quando un oggetto rigido esteso ruota attorno ad un asse passante per il suo CM, il suo momento angolare può essere espresso da una formula semplice. Immaginiamo il corpo scomposto nelle sue particelle $m_1, m_2, \ldots$ ciascuna avente distanza $b_1, b_2, \ldots$ dall'asse di rotazione, e velocità che sono tutte trasverse, le cui intensità indicheremo sinteticamente con $v_1, v_2, \ldots$. Risulta:

$$|\vec{L}| = m_1 v_1 b_1 + m_2 v_2 b_2 + \ldots$$

Poiché le distanze $b_1, b_2, \ldots$ dall'asse di rotazione non sono altro che i raggi delle circonferenze descritte da ciascuna particella del corpo, se indichiamo con ω la velocità angolare con cui il corpo sta ruotando, che è quindi la stessa per ogni sua particella, si ha che $v_1 = \omega b_1, v_2 = \omega b_2, \ldots$ Sostituendo:

$$|\vec{L}| = m_1 b_1^2 \omega + m_2 b_2^2 \omega + \ldots = (m_1 b_1^2 + m_2 b_2^2 + \ldots)\omega = I\omega$$

infatti la quantità fra parentesi è il momento d'inerzia $I = \Sigma m_i b_i^2$ attorno all'asse scelto, che già introducemmo parlando dell'energia dei corpi estesi rotanti. Definiamo ora il *vettore* velocità angolare $\vec{\omega}$ come avente modulo pari alla velocità angolare dell'oggetto, direzione perpendicolare alle circonferenze descritte dai punti del corpo, e verso tale che un osservatore con la testa nella punta di $\vec{\omega}$ vedesse antioraria la rotazione. Possiamo quindi concludere che vale la relazione:



Momento angolare attorno ad un asse di un corpo rigido esteso

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

La direzione di $\vec{\omega}$ (e quindi quella di $\vec{L}$) coincide con quella del pollice della mano *destra* quando le dita lunghe si dispongano a seguire la rotazione del corpo, come illustrato in figura.

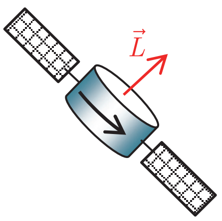
Cosa accade se l'asse di rotazione passa per il CM?

In questo caso il momento angolare non dipende più dall'asse ma è una caratteristica intrinseca dell'oggetto. Pensiamo ad esempio ad una ruota di bicicletta che gira attorno al mozzo: il momento angolare si ottiene semplicemente moltiplicando il momento d'inerzia di un anello, che vedemmo essere $I = MR^2$ per la velocità angolare. Analogamente quando si ha a che fare con cilindri (per i quali è $I = \frac{1}{2}MR^2$) oppure sfere ($I = \frac{2}{5}mR^2$) od anche oggetti di forma irregolare per i quali non esiste una formula che esprima il momento d'inerzia. Infine, come abbiamo visto studiando la rotazione dei corpi estesi, vale il *teorema degli assi paralleli* per il quale, se d è la distanza che separa l'asse di rotazione da un asse passante per il CM e ad esso parallelo, si ha: $I = I_{CM} + Md^2$, dove I_{CM} è il momento d'inerzia rispetto all'asse per il CM, ed I quello rispetto all'asse di rotazione a cui è parallelo. I valori del momento d'inerzia sono facilmente calcolabili per le figure geometriche regolari: ne riportiamo qualcuno in tabella.

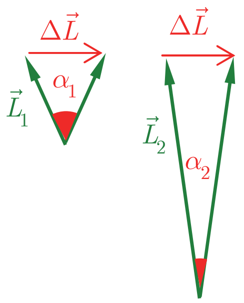
Momenti d'inerzia

anello	$I = MR^2$
cilindro pieno	$I = \frac{1}{2}MR^2$
sfera piena	$I = \frac{2}{5}MR^2$
guscio sferico	$I = \frac{2}{3}MR^2$
barretta (centro)	$I = \frac{1}{12}M\ell^2$
barretta (estremo)	$I = \frac{1}{3}M\ell^2$

Perché un grande valore di $\vec{L}$ stabilizza la direzione di un oggetto nello spazio?



E' comune la pratica di imprimere una rotazione agli oggetti che vogliamo mantenere stabilmente paralleli ad una data direzione. Ad esempio un proiettile viene fatto ruotare su se stesso dalla rigatura a spirale entro la canna della pistola o del fucile, e lo stesso si fa con un siluro. Un satellite artificiale compie un giro ogni tre-quattro secondi e così facendo non subisce deviazioni ad opera dell'attrito con l'atmosfera o delle collisioni con particelle cosmiche, che potrebbero modificare la direzione di spinta del motore e la traiettoria calcolata. Allo stesso modo la ruota di una bicicletta o di una moto, che da ferme tenderebbero a cadere di lato, se messe in rotazione acquisiscono stabilità mantenendo l'asse parallelo al terreno. In tutti questi casi il fatto che il corpo possiede un momento angolare rende minimi gli effetti di rotazione dovuti al momento torcente delle forze esterne. Evidentemente, maggiore è l'intensità di $\vec{L}$, minore è l'angolo α di cui ruota l'oggetto se sottoposto ad uno stesso momento torcente $\vec{\tau}$. Ci si convince facilmente di questo osservando l'effetto che una stessa variazione $\Delta\vec{L} = \vec{\tau}\Delta t$ produce sui due valori $\vec{L}_1$ ed $\vec{L}_2$ molto diversi.



Come si esprime l'energia cinetica di un corpo rigido rotante?

Come abbiamo già visto studiando la cinematica dei corpi estesi rotanti, tutti i punti del corpo descrivono delle circonferenze attorno all'asse di rotazione, con uguale velocità angolare ω. L'energia cinetica si ottiene addizionando quella delle particelle che formano il corpo:

$$K = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 + \ldots$$

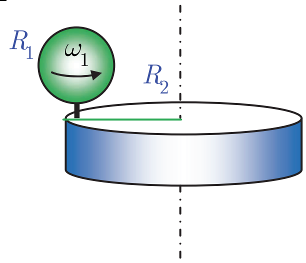
dove le velocità delle particelle abbiamo già visto che sono legate alle distanze dagli assi dalla velocità angolare $v_1 = \omega b_1, v_2 = \omega b_2, \ldots$ Sostituendo si ottiene:

$$K = \tfrac{1}{2}m_1(\omega b_1)^2 + \tfrac{1}{2}m_2(\omega b_2)^2 + \ldots = \tfrac{1}{2}(m_1b_1^2 + m_1b_2^2 + \ldots)\omega^2 = \tfrac{1}{2}I\omega^2$$

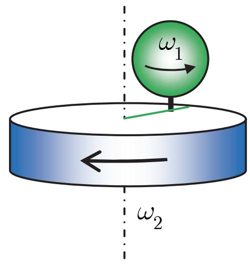
Energia cinetica di un corpo rigido in rotazione

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Esercizi



87. Una sfera di raggio $R_1 = 1.50$ m e massa $m_1 = 10.0$ kg è dotata di un motore in grado di farla girare su se stessa in verso antiorario alla velocità angolare $\omega_1 = 8.50$ rad/s . Essa viene imperniata al bordo di una piattaforma cilindrica di raggio $R_2 = 5.00$ m e massa $m_2 = 90.0$ kg girevole attorno al suo asse centrale. In assenza di attriti, calcolare la velocità angolare con la quale si mette in moto la piattaforma quando il motore della sfera viene acceso.



Le forze esterne al sistema (gravità e normale del piano di appoggio della piattaforma) hanno momento nullo rispetto all'asse centrale di questa, pertanto si conserva il momento angolare rispetto a tale asse. Quindi quando il motore della sfera viene acceso la piattaforma deve mettersi a girare in verso contrario con velocità angolare ω_2 in modo da mantenere il momento angolare complessivo nullo com'era all'inizio. Il momento angolare della sfera rispetto all'asse centrale della piattaforma contiene, oltre al momento angolare della sua rotazione, il termine $m_1 R_2^2 \omega_2$ dovuto al fatto che ora la sfera è anche una massa m_1 che ruota con velocità angolare ω_2 a distanza R_2 dall'asse. In direzione verticale si ha quindi che la somma delle componenti dei due momenti angolari è zero:

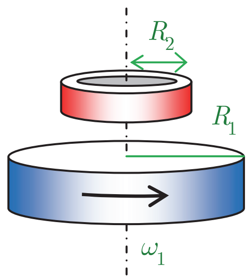
$$0 = L_{sfera} + L_{piattaforma} = (I_1\omega_1 + m_1 R_2^2 \omega_2^2) + I_2 \omega_2$$

e considerato che $I_1 = \frac{2}{5} m_1 R_1^2$ e che $I_2 = \frac{1}{2} m_2 R_2^2$ risulta:

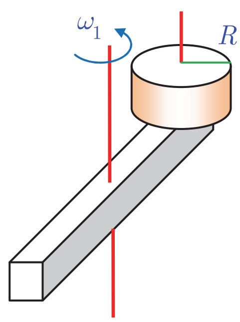
$$0 = \frac{2}{5} m_1 R_1^2 \omega_1 + m_1 R_2^2 \omega_2 + \frac{1}{2} m_2 R_2^2 \omega_2$$

$$\omega_2 = -\frac{\frac{2}{5} m_1 R_1^2}{m_1 R_2^2 + \frac{1}{2} m_2 R_2^2}\omega_1 = -\left(\frac{\frac{2}{5} \times 10.0 \times 1.50^2 \times 8.00}{10.0 \times 5.00^2 + \frac{1}{2} \times 90.0 \times 5.00^2}\right) \text{rad/s} = -0.445 \text{ rad/s}$$

ed il segno negativo indica una rotazione oraria, opposta a quella della sfera per compensare.



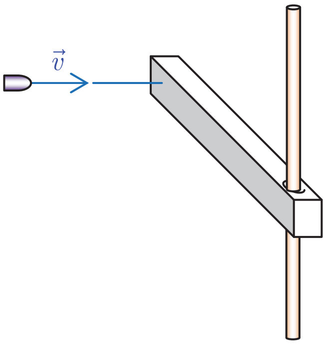
88. Una piattaforma cilindrica di massa $m_1 = 80.0$ kg e raggio $R_1 = 4.00$ m sta ruotando ad una velocità angolare $\omega_1 = 3.60$ rad/s attorno al suo asse centrale. Un anello di massa $m_2 = 25.0$ kg e raggio $R_2 = 2.00$ m viene fatto cadere su di essa in modo che i loro assi coincidano, e trascinato dall'attrito nella rotazione. Si calcoli la nuova velocità angolare. [R: 3.11 rad/s]



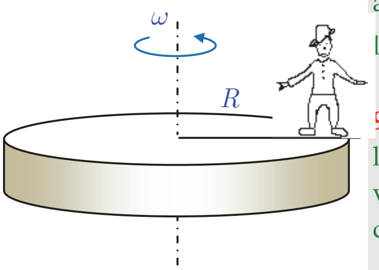
89. Una barretta di massa $m_1 = 20.0$ kg lunga $\ell = 6.00$ m, gira in verso antiorario attorno al suo punto medio a velocità angolare $\omega_1 = 1.30$ rad/s con imperniato ad un estremo un cilindro di raggio $R = 0.400$ m e massa $m_2 = 3.00$ kg . In assenza di attriti, calcolare la velocità a cui dovrebbe mettersi in rotazione il cilindro per arrestare il moto della barretta e l'energia necessaria per una tale operazione.

[R: 471 rad/s; 2.66×10^4 J]

90. Una barretta vincolata in orizzontale, ferma, di massa $m_1 = 50.0$ g e lunga $\ell = 1.40$ m, è libera di ruotare attorno ad un asse verticale per un estremo. Viene colpita perpendicolarmente all'estremo opposto da un proiettile di massa

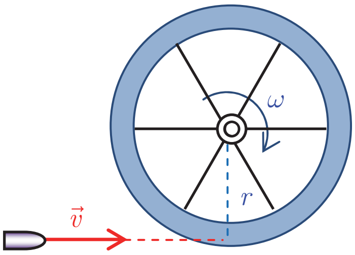


$m_2 = 5.60$ g alla velocità di $|\vec{v}| = 120$ m/s. Sapendo che il proiettile resta conficcato, si calcoli la velocità angolare con cui si mette a ruotare il sistema. [R: 9.25 rad/s]

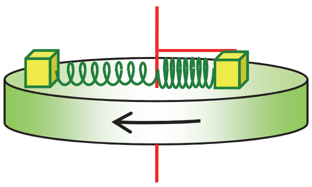


91. Una piattaforma cilindrica di massa $M = 500$ kg e raggio $R = 5.00$ m ruota senza attrito attorno all'asse centrale con velocità angolare $\omega = 1.254$ rad/s ed un uomo, di massa $m = 80.0$ kg, è fermo sul bordo. Ad un certo istante l'uomo si mette a camminare e raggiunge il centro. Trascurando il momento d'inerzia dell'uomo quando alla fine si trova a ruotare su sé stesso, calcolare (1) la velocità angolare finale (2) il lavoro svolto dall'uomo. [R: 1.66 rad/s, 2.12×10^3 J]

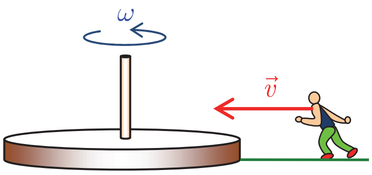
92. Un pazzo decide di fermare la rotazione terrestre mettendosi a correre lungo l'equatore. E' davvero così pazzo oppure la sua idea ha un qualche fondamento? Deve correre nello stesso verso della Terra oppure al contrario? Calcola la velocità che dovrebbe raggiungere per riuscire nel suo folle intento, se la sua massa è 80.0 kg schematizzando la Terra come una sfera rigida di massa $M = 5.976 \times 10^{24}$ kg e raggio $R = 6.378 \times 10^6$ m. [R: 4000 miliardi di volte la velocità della luce!]



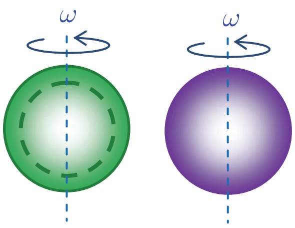
93. Una ruota di legno massa $M = 2.00$ kg e raggio $r = 15.0$ cm è schematizzabile come un anello orizzontale che gira imperniato attorno all'asse con velocità angolare oraria $\omega = -20.0$ rad/s. Un proiettile di massa $m = 50.0$ g viene sparato contro il bordo dell'anello tangenzialmente ad esso a velocità $|\vec{v}| = 40.0$ m/s con i versi come in figura. Supponendo che il proiettile si incastri nell'anello determinare (1) la nuova velocità angolare, (2) l'energia dissipata nella collisione. [R: -13.0 rad/s, 45.0 J]
.



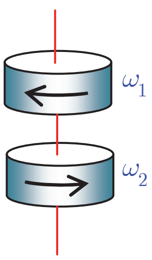
94. Una piattaforma cilindrica di massa $M = 40.0$ kg e raggio $R = 2.60$ m sta ruotando attorno all'asse centrale con velocità angolare ω. Su di essa si ha una massa $m = 3.00$ kg agganciata all'asse stesso da una molla di $k = 120$ N/m e legata all'asse da un filo che la vincola a stare ad un terzo del raggio della piattaforma, dove la molla è a riposo. A un certo istante il filo viene tagliato e la molla si allunga divenendo due terzi del raggio. Si calcolino: la velocità di rotazione prima e dopo il taglio e l'energia finale del sistema in assenza di attriti. [R: 4.58 rad/s, 4.47 rad/s, 2.79×10^3 J]



95. Un ragazzo di $m = 60.0$ kg salta su di una giostra correndo a velocità $|\vec{v}_1| = 1.26$ m/s. La giostra è un disco di massa $M = 200$ kg e raggio $R = 1.50$ m, in moto con velocità angolare $\omega = 1.40$ rad/s come in figura. Calcolare la distanza dall'asse a cui deve salire se vuole mantenere la giostra in rotazione alla stessa velocità angolare. Calcolare quale sarebbe la velocità angolare se il ragazzo fosse calato fermo, dall'alto, alla stessa distanza dall'asse. [R: 0.900 m, 1.15 rad/s]



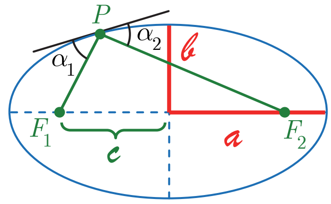
96. Un motore di potenza 200 W deve portare a ruotare alla stessa velocità angolare $\omega = 2.40$ rad/s un guscio sferico ed una sfera piena, di materiali differenti ma entrambi di massa $M = 300$ kg e raggio $R = 1.80$ m. Si calcolino i tempi necessari a queste due operazioni. [R: 3.89 s, 6.48 s]



97. Due cilindri identici di massa $m = 6.00$ kg e raggio $R = 2.00$ m ruotano attorno al comune asse centrale in versi opposti, con velocità angolari la prima doppia della seconda, come in figura. Quando il primo viene fatto cadere sul secondo, le forze d'attrito, dissipando un'energia di 100 J, portano il sistema ad una stessa velocità angolare finale. Si calcoli il suo valore. [R: 1.32 rad/s]

7. Le leggi di Keplero

Negli anni dal 1609 al 1619 l'astronomo polacco Keplero formulò empiricamente le tre leggi che regolano il moto orbitale: sia quello dei pianeti attorno al Sole che quello dei satelliti attorno ad un pianeta. Successivamente si scoprì che esse trovavano piena giustificazione teorica nel quadro delle leggi della dinamica, e furono poi dimostrate nel 1687 da Newton a partire da quest'ultime. Non si tratta quindi di principi fisici fondamentali ma piuttosto di teoremi, tuttavia per motivi storici si mantiene per esse la denominazione di *leggi*. La grande novità introdotta da Keplero furono le traiettorie orbitali a forma di *ellisse*, una curva leggermente schiacciata rispetto alla circonferenza, caratterizzata da due punti F_1 ed F_2 detti *fuochi*, che si trovano in posizioni eccentriche, simmetriche ai lati del centro. Questa scoperta costituì un punto di rottura con la tradizione classica, per la quale solo la circonferenza, con la perfezione della sua simmetria, si adattava ad essere percorsa dagli incorruttibili corpi celesti. Enunciamo i risultati di Keplero:



Un punto P appartenente all'ellisse mantiene sempre costante la somma delle sue distanze dai fuochi. Si ha:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = costante = 2a$$

Le lunghezze a e b sono dette rispettivamente *semiasse maggiore* e *semiasse minore*. I fuochi si trovano sempre sul semiasse maggiore. Se con c indichiamo la distanza dei fuochi dal centro dell'ellisse, si può dimostrare che vale la relazione $a^2+b^2=c^2$. I due angoli α_1 ed α_2 che la tangente forma con i segmenti che uniscono P ai fuochi, si mantengono sempre uguali fra loro. Infatti, il punto di tangenza P è l'unico della retta a non essere esterno all'ellisse, e nei punti *esterni* all'ellisse la somma delle distanze dai fuochi è *maggiore* di $2a$. Quindi in P la somma delle distanze dai fuochi è la minima di tutta la retta. Sappiamo dal *teorema di Erone* che il punto su di una retta per cui è minima la somma delle distanza da due punti, ha le congiungenti coi punti stessi che formano con la retta data angoli uguali fra loro.

(1) Legge delle orbite: la traiettoria descritta dal pianeta è tutta su di un piano, ed ha la forma di un'ellisse, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.

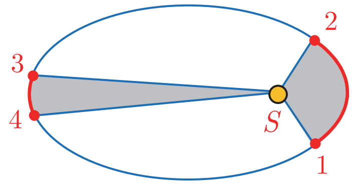
(2) Legge della velocità areale: è costante durante l'orbita la velocità con cui il raggio che unisce il pianeta a quella al Sole, spazza l'area del settore di ellisse.

(3) Legge dei periodi: in tutte le orbite attorno ad uno stesso corpo di massa M è uguale il rapporto T^2/a^3 fra il quadrato del tempo T di percorrenza dell'orbita (periodo di rivoluzione) ed il cubo del semiasse maggiore a dell'ellisse. Risulta:

$$T^2/a^3 = 4\pi^2/GM$$

Qual è il significato delle leggi di Keplero?

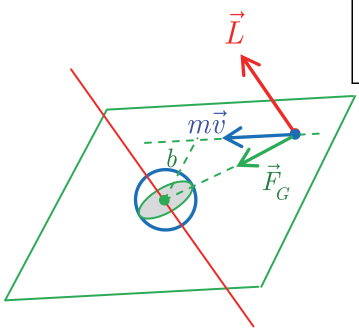
Abbiamo discusso la legge dei periodi quando ci siamo occupati del moto orbitale circolare, che costituisce il caso particolare in cui i fuochi coincidono e l'ellisse si riduce ad una circonferenza. Sappiamo già che la costanza del rapporto T^2/a^3 è un modo di esprimere la proprietà che maggiore è la distanza media del pianeta dal Sole, più bassa è la velocità media con cui l'orbita è percorsa. Infatti, se ad esempio raddoppia il semiasse, per mantenere costante il rapporto T^2/a^3 il periodo deve crescere di un fattore maggiore del doppio, cioè $2\sqrt{2}$, e così via. Ci concentreremo ora sul significato della seconda legge, che come vedremo coinvolge il momento angolare del sistema. Il fatto che il segmento che unisce il pianeta al Sole spazzi aree uguali in tempi uguali, comporta che all'interno di una data orbita *il moto sia più veloce in prossimità del Sole*. Consideriamo infatti i due settori di ellisse in figura, uno dalle parti del *perielio* (posizione di minima distanza dal sole) ed uno dalle parte dell'*afelio* (posizione di massima distanza). E' evidente che per spazzarli in uno stesso intervallo temporale il pianeta deve percorrere la maggiore distanza da 1 a 2 più velocemente della minore distanza da 3 a 4. La velocità areale si mantiene costante per un pianeta ma cambia da un pianeta all'altro. Infatti, la legge della costanza delle velocità areali ci permette di calcolarne il valore dividendo l'intera area dell'orbita per il periodo di rivoluzione. Giacché l'area dell'ellisse misura πab, risulta allora: $V_{areale} = \pi ab/T$ ed il valore che si ottiene dipende dalla geometria dell'orbita.



La Controfisica

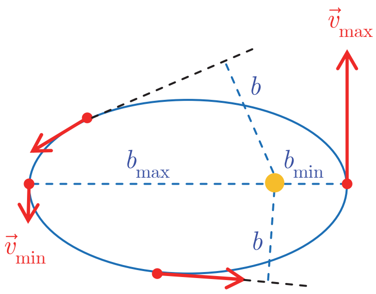
Il rapporto 3:2 fra l'esponente del periodo e quello del semiasse maggiore fu intuito da Keplero, oltre che dalle osservazioni, basandosi sulla conoscenza risalente alla scuola pitagorica, che due corde tese le cui lunghezze sono nel rapporto 3:2 producevano suoni molto armonici fra di loro, e assai gradevoli se emessi insieme. Questo rapporto è chiamato *una quinta* (ad esempio fra le note DO e SOL): Keplero pensava che i pianeti si muovessero in rapporti armonici come legati al Sole da corde invisibili, e pubblicò i suoi risultati nel 1619 in un'opera scientifica che lascia trasparire quest'idea sin dal titolo: *Harmonices Mundi*.

Cosa accade al momento angolare di un pianeta in orbita?



L'orbita di un pianeta si svolge tutta sul piano che contiene la velocità in ogni istante ed il centro del Sole. Il momento angolare rispetto ad un asse per il centro del Sole e perpendicolare a tale piano rimane costante.

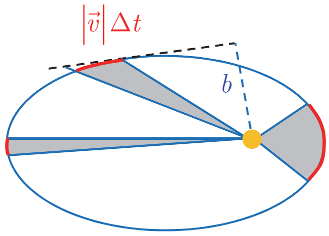
Infatti, anche la forza gravitazionale appartiene a questo piano, e quindi non vi sono azioni che possano modificare la componente della velocità perpendicolare ad esso, che quindi, essendo nulla inizialmente (per definizione), resta sempre nulla. Il raggio che unisce il Sole al pianeta, che è pure la direzione lungo cui la forza di gravità viene esercitata, non è perpendicolare alla velocità, come sarebbe se il pianeta descrivesse una circonferenza. Tuttavia, essendo nullo il momento torcente delle forze esterne al sistema pianeta-Sole, assumendo che il Sole non si sposti, non cambia il momento angolare $\vec{L}$ del pianeta rispetto ad un asse passante per il Sole e perpendicolare al piano dell'orbita. Il valore di $\vec{L}$ può essere calcolato moltiplicando il valore $m\ |\vec{v}|$ della quantità di moto istantanea, per la distanza b della retta che contiene $\vec{v}$ all'asse scelto:



$$|\vec{L}| = m\ |\vec{v}|\ b$$

Quale legge governa la variazione della velocità durante l'orbita?

Poiché il *momento torcente* esterno è nullo, in questa formula $|\vec{v}|$ e b cambiano continuamente mentre il pianeta descrive l'orbita, ma lo fanno in modo che il *momento angolare* resti sempre costante. Pertanto, nelle regioni in cui il pianeta si avvicina al Sole, e quindi diminuisce b, la velocità deve aumentare. In particolare, il più piccolo valore $b_{\min}$ di tale parametro lo si ha in corrispondenza della massima vicinanza al Sole (*perielio*) e a tale posizione deve corrispondere un massimo di velocità. Per la stessa ragione un minimo nella velocità lo avremo in corrispondenza della massima lontananza (afelio) dove troviamo $b_{\max}$. L'effetto dell'aumento della velocità in prossimità del perielio è evidente nel caso delle comete. Esse descrivono un'orbita molto schiacciata in cui la velocità all'afelio risulta bassissima se confrontata con quella al perielio e quindi passano la gran parte del periodo dell'orbita nella zona lontana dal Sole a motivo della diminuzione di velocità e transitano nei pressi dell'astro solo per un breve intervallo. Consideriamo un intervallo Δt durante il quale il pianeta percorre sull'orbita un tratto $|\vec{v}|\ \Delta t$. Più breve risulta l'intervallo, più l'area del settore ellittico evidenziato in figura corrisponde a quella di un triangolo di altezza b e base $|\vec{v}|\ \Delta t$, potendo considerare il breve tratto percorso sull'ellisse approssimativamente rettilineo. La velocità con cui viene spazzata quest'area è data da:



$$V_{areale} = \frac{area\ spazzata\ in\ \Delta t}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}\,|\vec{v}|\ \cancel{\Delta t}\cdot b}{\cancel{\Delta t}} = \frac{|\vec{L}|}{2m}$$

valore che si mantiene costante essendo sempre costante $\vec{L}$.

L'energia meccanica si conserva durante un'orbita?

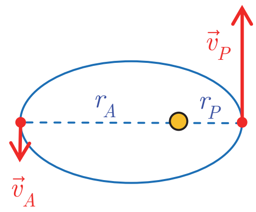
Sul sistema isolato Sole-pianeta non compiono lavoro altre forze esterne, quindi *rimane costante l'energia meccanica* E. Pertanto, scelti due punti qualunque dell'orbita, è sempre vero che $\Delta E = \Delta K + \Delta U = 0$ cioè:

$$E = K + U = \frac{1}{2} m\ |\vec{v}|^2 - G\frac{Mm}{r} = costante$$

dove M è la massa del Sole ed r la distanza del pianeta da esso. In particolare, dette r_P ed r_A rispettivamente la distanza al perielio ed all'afelio:

$$\frac{1}{2}\cancel{m}\ |\vec{v}_P|^2 - G\frac{M\cancel{m}}{r_P} = \frac{1}{2}\cancel{m}\ |\vec{v}_A|^2 - G\frac{M\cancel{m}}{r_A}$$

Osserviamo ora che in tali posizioni la velocità è perpendicolare al raggio che unisce il pianeta al Sole, e quindi l'intensità del momento angolare si scrive semplicemente:

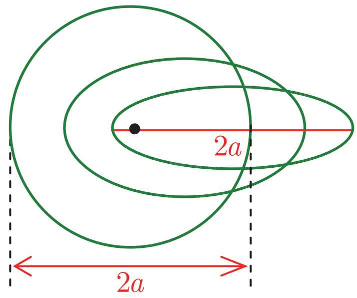


$$|\vec{L}| = mr_P\,|\vec{v}_P| = mr_A\,|\vec{v}_A| \quad \Rightarrow \quad |\vec{v}_A| = \frac{r_P}{r_A}\,|\vec{v}_P|$$

sostituiamo questo risultato nella legge di conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}\,|\vec{v}_P|^2\left(1-\frac{r_P^2}{r_A^2}\right) = GM\left(\frac{1}{r_P}-\frac{1}{r_A}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\,|\vec{v}_P|^2\,\frac{(r_A+r_P)\cancel{(r_A-r_P)}}{r_A^{\cancel{2}}} = GM\,\frac{\cancel{(r_A-r_P)}}{\cancel{r_A}\,r_P}$$

Essendo $r_A + r_P = 2a$, con a semiasse maggiore dell'orbita, ricaviamo la velocità al perielio ed all'afelio in funzione dei soli parametri geometrici r_P ed r_A :



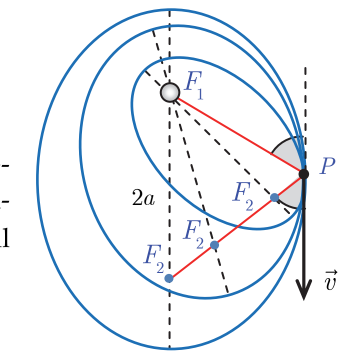
$$\left|\vec{v}_P\right| = \sqrt{\frac{GM}{a}\cdot\frac{r_A}{r_P}} \qquad\qquad \left|\vec{v}_A\right| = \sqrt{\frac{GM}{a}\cdot\frac{r_P}{r_A}}$$

Giacché E non dipende dal punto dell'orbita in cui ci troviamo, si può ottenere un' espressione per l'energia in un'orbita ellittica, calcolandone il valore al perielio:

$$E = \tfrac{1}{2}m\left|\vec{v}_P\right|^2 - G\frac{Mm}{r_P} = m\frac{GM}{2a}\cdot\frac{r_A}{r_P} - G\frac{Mm}{r_P} = GMm\,\frac{\cancel{r_A} - (\cancel{r_A} + \cancel{r_P})}{\cancel{r_P}(r_A+r_P)}$$

$$\boxed{E = -\frac{GMm}{2a}}$$

Pertanto tutte le orbite che hanno lo stesso lunghezza a del semiasse sono caratterizzate da uguale energia $E = -GMm/2a$: in figura ne abbiamo rappresentata qualcuna. Come già osservato per il moto orbitale circolare (dove è $E = -GMm/2R$), il *valore negativo dell'energia complessiva indica che il sistema è legato dalla gravità*. C



Maggiore la velocità con cui un corpo passa in P, più larga l'ellisse dell'orbita su cui si dispone. Per tutte le possibili ellissi, il secondo fuoco è sempre sulla retta stabilita dalla regola che sono uguali gli angoli della velocità con le congiungenti punto-fuochi.

Come possiamo calcolare la velocità in un punto qualunque dell'orbita?

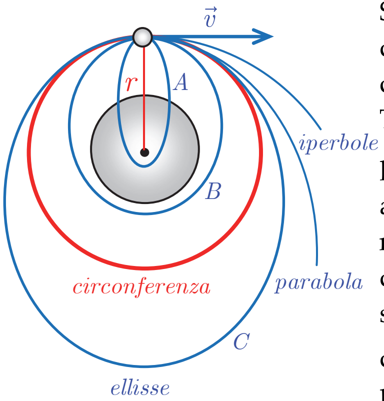
Inserendo l'espressione dell'energia nella relazione precedente, otteniamo una legge che permette di calcolare la velocità di un corpo di massa m , lungo un'orbita di asse maggiore $2a$, attorno ad un altro corpo avente massa M , quando si trova a distanza r da questo. Come si vede il valore di m è ininfluente:

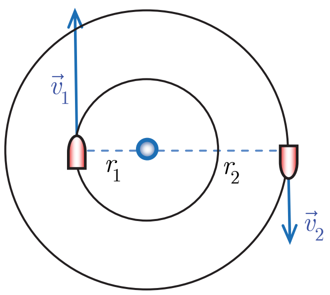
$$\frac{1}{2}\cancel{m}\;|\vec{v}|^2 - G\frac{M\cancel{m}}{r} = -G\frac{M\cancel{m}}{2a} \quad \Rightarrow \quad |\vec{v}| = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2a}\right)}$$

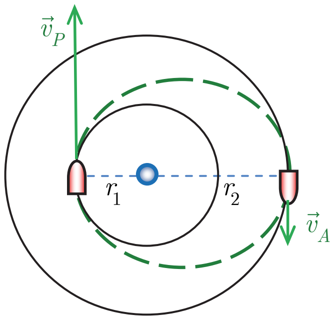
Se quindi, ad esempio, lanciamo un satellite facendo in modo che giunga nel punto P in figura con velocità $\vec{v}$, esso si disporrà su di un'orbita ellittica avente $\vec{v}$ per tangente in P, il cui asse maggiore $2a$ è legato a r e $\vec{v}$ da questa relazione. Come si vede, maggiore è la velocità con cui inviamo il satellite in P, e che figura a primo membro, più piccolo deve essere il termine $1/2a$ che viene sottratto dentro alla radice, e quindi più grande il suo denominatore $2a$. Quindi, per grandi velocità l'ellisse si allunga molto, e quanto più il termine $1/2a$ diventa piccolo, tanto più l'orbita si estende lontano dalla Terra. Il caso limite in cui $1/2a$ è nullo ci fornisce il valore della velocità che il corpo deve possedere, a distanza r dal fuoco dell'orbita, per potersi allontanare infinitamente. Essa è detta *velocità di fuga*: $v_F = \sqrt{2GM/r}$. Un corpo che a distanza r dal fuoco si trovi alla velocità di fuga, descrive un'orbita aperta la cui forma è una parabola.

La Controfisica

La traiettoria parabolica di fuga non va confusa con le traiettorie approssimativamente paraboliche che abbiamo trattato studiando il problema balistico, assumendo che localmente la Terra sia piatta e la forza di gravità costante. Come mostra questa trattazione più dettagliata, le traiettorie di un corpo in caduta libera sulla superficie terrestre sono, in realtà, archi di ellisse.







Come possiamo stabilire la traiettoria di un corpo che passa vicino ad un pianeta?

Supponiamo che un asteroide si trovi a passare per il punto di minima distanza r dal centro della Terra, con velocità $\vec{v}$, come in figura. Se la sua energia meccanica complessiva è negativa verrà catturato, descrivendo un'ellisse, con il centro nella Terra in uno dei due fuochi. Se la velocità dell'asteroide è minore di quella che compete all'orbita circolare ad altezza r (cioè quando $|\vec{v}|< \sqrt{GM/r}$) l'asteroide si trova all'apogeo di un'orbita ellittica (curva B, con il centro della Terra nel fuoco più lontano dall'attuale posizione dell'asteroide). Per velocità molto basse, una parte dell'ellisse intercetta il pianeta[4] (ellisse A) e l'asteroide entra nell'atmosfera, e se non si consuma lungo il percorso per il riscaldamento dovuto alla compressione dell'aria davanti a sé, arriva a terra. Se viceversa $|\vec{v}|> \sqrt{GM/r}$, il corpo si trova al perigeo della sua orbita ellittica (curva C, con il centro della Terra che occupa il fuoco più prossimo), e quindi l'ellisse descritta dall'asteroide si allargherà dalla parte opposta al suo passaggio. Nel caso particolare in cui l'energia è esattamente nulla, la traiettoria diviene un arco di *parabola*. Se infine $U+K>0$ l'asteroide sfuggirà all'attrazione gravitazionale. E' possibile dimostrare che la curva seguita in questo caso è un tratto di *iperbole*[5] con un fuoco nel centro della Terra.

Come si possono eseguire delle manovre orbitali?

Far passare un satellite da un'orbita ad un'altra più esterna o più interna è un'operazione che si può realizzare con minimo dispendio di carburante se si sfrutta il fatto che le traiettorie a motori spenti sono sempre degli archi di ellisse. Consideriamo il caso semplice in cui si voglia trasferire un satellite in orbita su una traiettoria circolare di raggio r_1 ad una più esterna di raggio r_2, quindi più lenta ed avente maggiore energia complessiva (il valore $-GMm/2a$ è meno negativo). Si procede immettendo il satellite lungo un'*orbita di trasferimento* di forma ellittica (che verrà percorsa per metà), in cui r_1 ed r_2 sono perigeo e apogeo, e quindi l'asse maggiore è $r_1+r_2=2a$. La sonda eseguirà due accensioni dei razzi, la prima per portare la propria velocità dal valore $|\vec{v}_1|$ del moto orbitale circolare di raggio r_1, al valore $|\vec{v}_P|$ del moto orbitale ellittico di perigeo r_1 (ed apogeo r_2):

$$|\vec{v}_1|=\sqrt{\frac{GM}{r_1}} \quad\rightarrow\quad |\vec{v}_P|=\sqrt{\frac{GM}{r_1}\frac{r_2}{a}}$$

Come si vede dalle formule, essendo $r_2/a>1$ risulta $|\vec{v}_P|>|\vec{v}_1|$ quindi i motori devono spingere nel verso del moto ed accelerare la sonda. Dopo questa operazione di qualche secondo, il satellite segue a motori spenti il tratto di ellisse che la porta da 1 a 2, dove deve ancora accendere i razzi per portarsi sulla nuova orbita circolare, cambiando la sua velocità, che nel frattempo è scesa al valore $\left|\vec{v}_A\right|$ del moto orbitale ellittico di apogeo r_2, al valore $\left|\vec{v}_2\right|$ del moto circolare di raggio r_2:

$$\left|\vec{v}_A\right|=\sqrt{\frac{GM}{r_2}\frac{r_1}{a}} \quad\rightarrow\quad \left|\vec{v}_2\right|=\sqrt{\frac{GM}{r_2}}$$

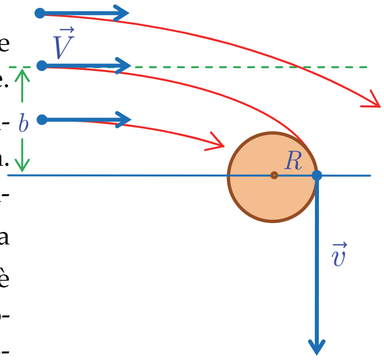
Essendo $r_1/a<1$ risulta $|\vec{v}_A|<|\vec{v}_2|$ quindi anche in questa manovra i motori devono spingere nel verso del moto per accelerare la sonda.

---

[4] Nei problemi di caduta libera dove la forza gravitazionale è costante, abbiamo approssimato questo tratto di ellisse con un arco di parabola, potendo considerare piano il tratto della superficie del nostro pianeta immediatamente al di sotto.

[5] Si chiama *iperbole* il luogo dei punti in cui è costante la differenza delle distanza da due punti fissi detti fuochi.

Sotto quali condizioni un meteorite può entrare in collisione con la Terra?



La conservazione del momento angolare e dell'energia, che sono all'origine delle leggi di Keplero, permetto di risolvere il problema dell'impatto con un meteorite. Consideriamo un meteorite di massa m in moto con velocità $\vec{V}$, quando è così distante dalla Terra che la sua energia potenziale gravitazionale può considerarsi nulla. Sappiamo già che in assenza di altre azioni, il moto si svolge tutto sul piano che contiene $\vec{V}$ ed il centro della Terra, e ci si si presentano le due possibilità in figura. Se la distanza b, della retta che contiene $\vec{V}$, dal centro della Terra (*parametro d'impatto*) è grande, il meteorite viene soltanto deviato, se viceversa è piccola ha luogo la collisione. Fra le due situazioni esiste il caso limite in cui il meteorite tocca la Terra con velocità $\vec{v}$ tangente alla sua superficie. Calcoliamo ora il valore del parametro d'impatto in questo caso limite. Detto R il raggio terrestre, la conservazione del momento angolare dà:

$$|\vec{L}| = m\,|\vec{V}|\,b = m\,|\vec{v}|\,R \;\Rightarrow\; |\vec{v}| = |\vec{V}|\,\frac{b}{R}$$

Applichiamo ora la conservazione dell'energia, indicando con $K_0 = \frac{1}{2}m\,|\vec{V}|^2$ l'energia cinetica iniziale del meteorite, e con U_0 ed U_R le energie potenziali gravitazionali nelle due posizioni:

$$K_0 + \cancel{U_0} = \frac{1}{2}m\,|\vec{v}|^2 + U_R$$

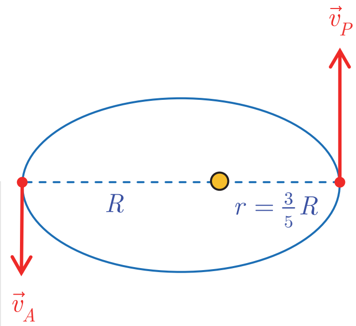
dove si è sfruttato che il meteorite fosse a distanza tale da essere $U_0 = 0$. Inserendo in questa equazione la conservazione del momento angolare:

$$K_0 = \frac{1}{2}m\,|\vec{V}|^2\,\frac{b^2}{R^2} + U_R = K_0\,\frac{b^2}{R^2} + U_R$$

da cui abbiamo il valore minimo del parametro d'impatto per cui avviene la collisione:

$$b = R\sqrt{1 - \frac{U_R}{K_0}}$$

Come in tutti i problemi di astronomia, per energia potenziale del meteorite sulla superficie terrestre si intende il valore negativo $U_R = -GM_T m/R$, dove la posizione di riferimento è quella in cui il meteorite si trova a distanza infinita.



Esercizi

98. Un pianeta di massa $m = 7.50 \times 10^{23}$ kg descrive un'orbita ellittica attorno ad una stella. Detta R la massima distanza dal centro della stella (*apoastro*), ed r la minima (*periastro*), si ha che $r/R = 3/5$. Calcolare il lavoro fatto dalla forza di gravità quando il pianeta passa dalla minima alla massima distanza, sapendo che la velocità al periastro è 30.0 km/s.

Quando il pianeta passa dal periastro all'apoastro rimane costante il momento angolare del sistema che esso forma con la stella. In queste particolari posizioni $|\vec{L}|$ si può calcolare in modo semplice, osservando che il parametro b è la stessa distanza del pianeta:

$$|\vec{L}| = m\,|\vec{v}_A|\,R = m\,|\vec{v}_P|\,r \;\Rightarrow\; |\vec{v}_A| = |\vec{v}_P|\,\frac{r}{R} = \frac{3}{5}\,|\vec{v}_P|$$

ed inoltre si conserva l'energia, essendo la forza interna a lavorare la gravità:

$$\Delta K + \Delta U = \tfrac{1}{2}m\,|\vec{v}_A|^2 - \tfrac{1}{2}m\,|\vec{v}_P|^2 + \Delta U = 0$$

$\Delta U = \frac{1}{2} m\ |\vec{v}_A|^2 - \frac{1}{2} m\ |\vec{v}_P|^2 = \frac{1}{2} m\ |\vec{v}_P|^2 \left[1 - |\vec{v}_A|^2\ /\ |\vec{v}_P|^2\right] = \frac{1}{2} m\ |\vec{v}_P|^2 \left[1 - (3/5)^2\right] =$

$= [\frac{1}{2} \times 7.50 \times 10^{23} \times (30.0 \times 10^3)^2 \times \frac{16}{25}] \text{J} = 2.16 \times 10^{32}\ \text{J}$

Il lavoro svolto dalla gravità durante questo passaggio è ovviamente resistente dato che tende a contrastare l'allontanamento del pianeta. Come sappiamo, il lavoro di una forza conservativa è l'opposto della variazione di energia potenziale:

$L = -\Delta U = -2.16 \times 10^{32}\ \text{J}$

99. Un meteorite molto lontano dalla Terra avanza lungo una retta la cui distanza dal centro del nostro pianeta è pari a due raggi terrestri. Ipotizzando che il pianeta sia fermo, calcolare la velocità al di sotto di cui si ha la collisione. ($M_T = 5.98 \times 10^{24}$ kg, $R = 6.370 \times 10^6$ m, $G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2). [R: 6.45 km/s]

100. Una sonda di $m = 1.500 \times 10^4$ kg su di un'orbita circolare a 800 km dalla superficie della Terra, deve portarsi su di un'altra orbita circolare più esterna a 1600 km dalla superficie, seguendo un'orbita ellittica di trasferimento. Assumendo che la Terra sia una sfera di raggio $R_T = 6370$ km e massa $M = 5.983 \times 10^{24}$ kg, si calcoli quanto dura il trasferimento (è la metà del periodo dell'orbita ellittica) e l'energia che è necessario spendere per eseguire la manovra. [R: 3.27×10^3 s, 8.38×10^{14} J]

101. Calcolare l'energia necessaria per mandare una capsula spaziale di massa $m = 1.400 \times 10^4$ kg su di un'orbita ellittica di asse maggiore lungo quattro volte il raggio terrestre $R_T = 6370$ km, partendo dalla superficie del pianeta, essendo $M_T = 5.983 \times 10^{24}$ kg. [R: 6.58×10^{11} J]

102. Calcolare la velocità areale di un satellite in orbita geostazionaria, cioè circolare e ad altezza dal suolo 35800 km. [R: 6.49×10^{10} m^2/s]

103. Calcolare le velocità all'apogeo e al perigeo, di un satellite in orbita ellittica attorno alla terra avente $r_P = 2R_T$, $r_A = 5R_T$ ($M_T = 5.983 \times 10^{24}$ kg, $R_T = 6370$ km). [R: 2.67 km/s, 6.69 km/s]

104. Calcolare il momento angolare della Luna sapendo che $M_L = \frac{1}{81} M_T$ ($M_T = 5.983 \times 10^{24}$ kg) sapendo che la distanza al perigeo è 363000 km e quella all'apogeo 406000 km. [R: 2.89×10^{34} kg m^2/s]

105. Trovare un'espressione per l'energia di un sistema binario di due stelle aventi massa $M_1 = \frac{4}{5} M$, $M_2 = M$, che orbitano attorno al CM del sistema mantenendo costante la loro reciproca distanza, sapendo che il raggio dell'orbita più interna misura r e ricordando (capitolo 5) che per un tale sistema si ha per il periodo la relazione: $T = 2\pi\sqrt{(r_1 + r_2)^3 / G(M_1 + M_2)}$. [R: $-\frac{104}{405} GM/r$]